LA DERIVATION

Introduction : LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN ZERO

1) ETUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{4-4(1-x)^2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

f (0) n'existe pas , mais f (x) est calculable pour toute les valeurs de x très voisines de 0.

« Que deviennent les nombres f (x) lorsque x prend des valeurs voisines de zéro ? »
(par exemple celles de $]-0{,}1 ; 0[\cup]0 ; 0{,}1[$)

Répondre à cette question, c'est déterminer la limite de f en 0.

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
f (x)	11.6	10	8,4	8.04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le tableau de valeurs ci-dessus, nous permet de constater que les nombres f (x) s'accumulent autour de 8, lorsque x est voisin de 0 …

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant ; en effet :
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = \frac{4-4(1-2x+x^2)}{x} = 8-4x$$

Ainsi, lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $f(x) = 8-4x$ s'accumulent autour de 8 .
Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I =]8-\varepsilon ; 8+\varepsilon[$, aussi petit que soit ε ($\varepsilon > 0$)

Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0{,}001$, tous les nombres $f(x) = 8-4x$ sont dans I , lorsque $-0{,}00025 < x < 0{,}00025$

On dit alors que 8 est la limite de f en 0 et on note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 8$

2) CAS GENERAL

Soit f une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df.
Intuitivement, dire que f a pour limite l en zéro, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de zéro, les nombres f (x) correspondants viennent s'accumuler autour de l .
C'est à dire que pour tout ε ($\varepsilon > 0$) , aussi petit qu'il soit, les nombres f (x) finissent par se situer dans l'intervalle $]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$.
On note :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l$$

3) QUELQUES RESULTATS A CONNAITRE … (admis)

- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0 .
  $\lim\limits_{x \to 0} P(x) = P(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0} Q(x) = Q(0)$
- Si P et Q sont définies et positives au voisinage de 0 , alors :
  $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}$

- Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = l'$, alors :
  $\lim\limits_{x \to 0} (f+g)(x) = l + l'$ et $\lim\limits_{x \to 0} (f \times g)(x) = l \times l'$

Ex :

$\lim\limits_{x \to 0} (-3x^2+2x-8) = -8$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4x+2}{x^2+1}\right) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{4x+2}{x^2+1}} = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(-3x^2+2x-8+\sqrt{\dfrac{4x+2}{x^2+1}}\right) = -8+\sqrt{2}$

I) FONCTION DERIVABLE – NOMBRE DERIVE

1) NOMBRE DERIVE

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d’intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Dire que la fonction f est **dérivable** en a et que **le nombre dérivé** de f en a est le réel L , revient à dire que **le taux de variation** de f en a , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0 .

Le nombre dérivé est noté f ’(a) , et on a : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Ex : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur ℝ et a un réel quelconque.

Pour $h \neq 0$, on a :

$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h$.

Or $\lim_{h \to 0} (2a+h) = 2a$.

Ainsi f est dérivable en a et f ’ (a) = 2 a .

2) TANGENTE EN UN POINT

Un peu d’intuition …

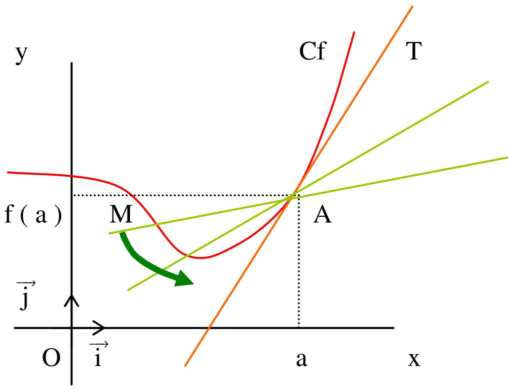
Soit M le point de Cf d’abscisse a + h .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à Cf au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe .

Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur f ’ (a) , et passe par A



Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point A (a ; f (a)) une **tangente** T de coefficient directeur f ’ (a) .

Une équation de la tangente en ce point est :

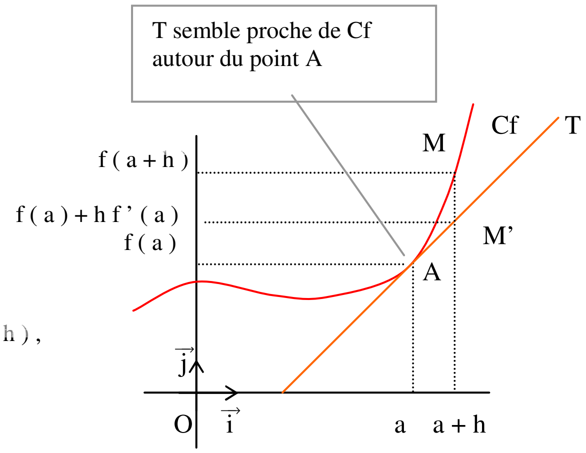
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

T admet une équation de la forme
y = f ’ (a) x + p ;
de plus elle passe par A (a ; f (a)) …

Cas particulier important :

- Si f ’ (a) = 0 , Cf admet au point d’abscisse a une tangente parallèle à l’axe des abscisses (tangente horizontale) d’équation y = f (a) .

3) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)



On dit que f (a) + h f ’ (a) est **la meilleure approximation affine** f (a + h) au voisinage de 0 .

Rem :

- La distance MM’ mesure la valeur absolue de l’erreur commise.
- Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine de f (a + h) , mais celle donnée par la tangente est la meilleure. *(admis …mais intuitif)*

Ex :

Le nombre dérivé de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ en un réel a est f ’ (a) = 2 a

Au voisinage de 0, on a donc $(a+h)^2 \approx a^2 + 2ah$

Par exemple , $(3{,}01)^2 = (3 + 0{,}01)^2$

Ainsi $(3{,}01)^2 \approx 9 + 2 \times 3 \times 0{,}01$, soit $(3{,}01)^2 \approx 9{,}06$

Dans ce cas il est possible de déterminer l’erreur commise ; elle est de h^2 , c'est à dire 0,0001 .

Quelques cas à retenir :

Au voisinage de 0 :

$(1+h)^2 \approx 1 + 2h$; $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$; $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$; $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$

4) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRETATION CINEMATIQUE DU NOMBRE DERIVE

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.
On note d (t) , la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)
Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant to est la limite des vitesses moyennes $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 .
Il s'agit du nombre dérivée en to de la fonction d .

Rem :
On retrouve ces résultats dans d'autres domaines scientifiques…
Le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen , coût moyen de production …).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané , coût marginal …) .

II) FONCTIONS DERIVEES

1) DEFINITION

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe .
La fonction dérivée de f sur I est la fonction , notée **f '**, qui , à tout x de I , associe le réel f ' (x) .

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f ' est « la dérivée de f »

Ex : La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \longmapsto 2x$

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f 'est définie .
Cet ensemble (noté Df ') est toujours inclus dans Df .

2) DERIVEES DE QUELQUES FONCTIONS DE REFERENCE

Théorème :

fonction f	fonction dérivée f '	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$f' : x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x$	$f' : x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$f' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Preuve :

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$, on a : $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = 0$
Ainsi f est dérivable en a et f ' (a) = 0 , ce qui est vrai pour tout réel a …

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = 1$
Ainsi f est dérivable en a et f ' (a) = 1 , ce qui est vrai pour tout réel a …

3)

Si a > 0 .

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\times\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$

Or $\lim_{h \to 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

1) SOMME , PRODUIT …

Théorème :

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints .

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel , alors :

- les fonctions k u , u + v et u . v sont dérivables sur D et :

$$(k u)' = k u' \quad , \quad (u + v)' = u' + v' \quad , \quad (u . v)' = u'. v + u . v' \quad \text{et} \quad (u)^n = n.(u').(u)^{n-1}$$

- si pour tout réel a de D , v (a) ≠ 0 , les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Preuve :

1) Soit $a \in D$

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(ku)(a+h) - (ku)(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = k u'(a)$

Ainsi ku est dérivable en a et (k u) ' (a) = k u ' (a) , ce qui est vrai pour tout $a \in D$ …

2) Soit $a \in D$

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

Ainsi u + v est dérivable en a et $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$

On en déduit que (u + v)' (a) = u ' (a) + v ' (a) , ce qui est vrai pour tout $a \in D$ …

3) Soit $a \in D$

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(u\ v)(a+h) - (u\ v)(a)}{h} = \ldots = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} u(a)$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

De plus $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$ …

4) Soit $a \in D$ pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h\, v(a)\, v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)\, v(a+h)}$ …

5) $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ …

2) CONSEQUENCES : de nouvelles formules à retenir

Théorème :

fonction f	fonction dérivée f '	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto x^2$	$f' : x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^3$	$f' : x \longmapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \longmapsto -\frac{2}{x^3}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Rem : Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$ et $-\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)\, x^{-n-1} = \ldots = m\, x^{m-1}$ (avec m = – n)

Ainsi la dérivée de $f : x \longmapsto x^n$ est vraie pour tout entier n (en n'oubliant pas $x \neq 0$ si $n < 0$)

3) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Ex :

Soit P le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P : x \longmapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$.
P est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2 \times x - 1 + 0 = 9x^2 + 10x - 1$

Théorème : (admis)

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Ex :

Soit f la fonction rationnelle définie par $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$

On peut écrire $f = \dfrac{u}{v}$ où $u : x \longmapsto 2x^2 + 1$ et $v : x \longmapsto x - 1$

On a $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, ainsi $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et v ne s'annule pas sur $\mathbb{R} - \{1\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a :
$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{4x(x-1) - (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$

Théorème : (admis)

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

4) DERIVE DE $f : x \longmapsto g(ax + b)$

Théorème : (admis)

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I . Pour tout réel x , tel que $ax + b \in I$, la fonction $f : x \longmapsto g(ax + b)$ est dérivable et : $\mathbf{f'(x) = a \cdot g'(ax + b)}$

Ex :

Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \sqrt{3x + 6}$
$3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, ainsi $D_f = [-2 ; +\infty[$
Pour tout $x \geq -2$, on peut écrire $f(x) = g(3x + 6)$ où g est la fonction racine carrée $g : t \longmapsto \sqrt{t}$

La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $t > 0$, $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

On a $3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Ainsi f est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ et pour tout $x > -2$: $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x + 6}}$

5) FONCTION SINUS ET FONCTION COSINUS

Théorème : (admis)

fonction f	fonction dérivée f '	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto \sin x$	$f' : x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \cos x$	$f' : x \longmapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$

IV) DERIVEE ET SENS DE VARIATION

1) DU SENS DE VARIATION AU SIGNE DE LA DERIVEE

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I , $f'(x) = 0$

Preuve : (de la première propriété … les deux autres se démontrent de la même façon)

Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$.
f est croissante sur I ; elle conserve donc le sens des inégalités.
Ainsi les différences $f(x+h) - f(x)$ et $(x+h) - x$ ont le même signe .

On en déduit que le rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est toujours positif.

f est dérivable en x donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite finie $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.

Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs positives et sa limite en 0 est donc nécessairement positive . On a donc $f'(x) \geq 0$.

2) DU SIGNE DE LA DERIVEE AU SENS DE VARIATION : admis

Théorème : (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- Si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Si la dérivée f' est strictement positive sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .

Si la dérivée f' est strictement négative sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^3 + 9$
f est une fonction polynôme , elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$
- $f'(0) = 0$
- Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f' (x)		+	0	+	
f (x)		↗	9	↗	

Attention : Il est fondamentale de se placer sur **un intervalle** .

Ex : La fonction inverse $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, ce qui est strictement négatif sur $\mathbb{R}^*$.

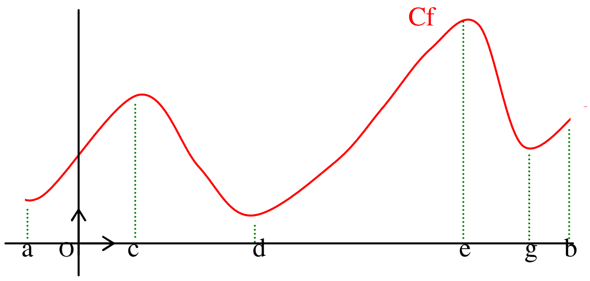
Comme vous le savez … f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$; elle l'est indépendamment sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

Rem :
Pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver ; n'oubliez pas :

- **La définition**
- **les compositions de fonctions** ($f : x \longmapsto (4-3x)^3$ … $f = u \circ v$ où $u : x \longmapsto x^3$ et $v : x \longmapsto 4 - 3x$ ...)
- **les sommes de fonctions** ($f : x \longmapsto x^2 + x - 2$ … $f = u + v$ où $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto x - 2$ …)

3) EXTREMUM D'UNE FONCTION

a) LA NOTION D'EXTREMUM LOCAL (ou relatif)



Sur l'intervalle [a ; b] , la fonction f représentée ci-contre admet un maximum en e et un minimum en d .
« Autour » de c et de g , on remarque que le comportement de f n'est pas banal …
On constate que *localement* (?) f admet un maximum en c et un minimum en g .
Plus précisément :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I distinct des extrémités.
On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en c si f (c) est le maximum (resp. minimum) de f restreinte à un intervalle **ouvert** contenant c .

Remarque sur les extrémités :

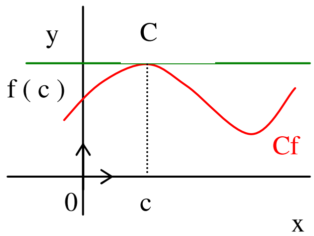
Sur un intervalle fermé [a ; b] , on peut définir un extremum local en a ou en b .
Par exemple , dire que f (a) est un maximum local signifie que f (a) est le maximum de f sur un intervalle [a ; α [, où $\alpha \leq b$.
Les fonctions que nous étudierons cette année admettront toujours un extremum en a et en b , mais ce n'est pas toujours le cas …

b) QUEL LIEN AVEC LA DERIVATION ?

Théorème : (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I .

Si f admet un extremum local en c , alors f ' (c) = 0 .



Conséquences graphiques :

On a f ' (c) = 0 , ainsi le coefficient directeur de la tangente à Cf en C est nul ; la tangente est horizontale .

Rem :

- Il est important que I soit ouvert .

Ex : f : $x \longmapsto x^2$ et I = [0 ; 1] , f (1) = 1 est le maximum de f sur I et pourtant f ' (1) = 2 …

- Une fonction non dérivable en un réel , peut admettre un extremum en ce réel .

Ex : Pensez à la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 …

- La réciproque de ce théorème est fausse . *(Si* f ' (c) = 0 , *on n'a pas forcément un extremum en c …)*

Ex : f : $x \longmapsto x^3$, f ' (0) = 0 et pourtant f (0) n'est pas un extremum local de f …

Pour fixer les idées , on choisit les extremums éventuels de f parmi les réels c vérifiant :
- c est une borne de I ,
- c est un réel où f n'est pas dérivable ,
- c est un réel où f est dérivable et tel que f ' (c) = 0 … mais comment choisir ?

Deux configurations à retenir : *Supposons que l'on puisse extraire du tableau de variation d'une fonction une telle configuration…*

x		c	
f ' (x)	–	0	+
f (x)	↘	f (c)	↗

x		c	
f ' (x)	+	0	–
f (x)	↗	f (c)	↘

La dérivée s'annule et change de signe … il semble que l'on soit en présence d'un extremum local .

Théorème : (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I .
Si la dérivée f ' **s'annule** en c en **changeant de signe**, alors f (c) est un extremum local de f sur I.