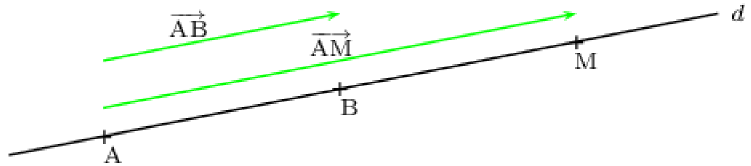
I) Les Droites dans le Plan Euclidien

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si ils ont la même direction. (les supports de ces 2 vecteurs forment alors 2 droites parallèles)
on a alors $\vec{v}=k.\vec{u}$ donc $x'=kx$ et $y'=ky$ avec $k\neq 0$

Propriété

Soient A et B deux points distincts d'une droite (d)
$M\in(d)$ si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB}$ est **un vecteur directeur** de la droite d.



***Remarques** :*
Une droite peut être définie par 2 points distincts.
Une droite peut être définie par un point et un vecteur directeur

Propriété

Deux droites (d) et (d') sont **parallèles** si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs **colinéaires**.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs et λ un réel alors: $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.
alors: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ en particulier $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$

si $I(x_I;y_I)$ est le **milieu** de $[AB]$,alors: $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$

Définition

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit 2 vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$
Le **déterminant** du couple $(\vec{u};\vec{v})$ est le réel $det(\vec{u},\vec{v})=xy'-x'y$

Propriété

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, Soit 2 vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si le **déterminant** du couple $(\vec{u};\vec{v})$ est nul soit $det(\vec{u},\vec{v})=0$

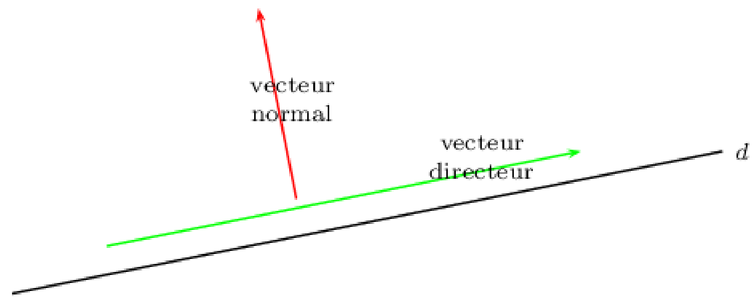
Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur de la droite** (d)
alors (d) admet une équation cartésienne du type $ax+by+c=0$
Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'égalité
$ax+by+c=0$ (avec a et b non nuls) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Définition

Un **vecteur normal à une droite** (d) est un vecteur **non nul** orthogonal à un vecteur directeur de (d)



Propriété

Un **vecteur normal à une droite** (d) est orthogonal à tout vecteur directeur de (d) ; Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (d) , alors $\vec{u}\perp\vec{n}$

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **orthogonaux** si et seulement si ils ont une direction perpendiculaire ; on a alors $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'=0$

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un **vecteur normal à la droite** (d) ,
alors (d) admet une équation cartésienne du type $ax+by+c=0$

Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'égalité $ax+by+c=0$ (avec *a* et *b* non nuls) est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit $A(2;3)$ un point et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ un vecteur.

Soit (d) la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{v}$

1) Donner un vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite (d)
2) Pour chaque équation qui suit, déterminer s'il s'agit d'une équation de la droite (d)
   a) $(d_1): -5x+4y-2=0$
   b) $(d_2): 4x+5y-22=0$
   c) $(d_3): -2x-2,5y+11,5=0$
   d) $(d_4): y=-0,8x+4,6$

Corrigé

$\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d) ; On définit alors le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$
(les coordonnées sont inversées, et l'une d'elles change de signe)
Ce vecteur $\vec{w}$ est alors orthogonal au vecteur $\vec{v}$ et comme $\vec{v}$ est normal à (d) , le vecteur non nul $\vec{w}$ est un **vecteur directeur de** (d)

Déterminons si les équations qui suivent concernent la droite (d)

1. $-5x+4y-2=0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ Or ce vecteur est un vecteur directeur de (d) , et il n'est donc pas normal à (d) . Donc **cette équation ne concerne pas** (d)
   En fait, c'est l'équation d'une droite perpendiculaire à (d)

2. $4x+5y-22=0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, qui est bien un vecteur normal à (d)
   Mais $4x_A+5y_A-22=4\times2+5\times3-22=1$
   Le résultat n'est pas nul. Donc $A\notin(d)$
   Donc **cette équation ne concerne pas** (d)

3. $-2x-2,5y+11,5=0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\-2,5\end{pmatrix}$ Or le vecteur non nul $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de (d) Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d)
   De plus, $-2x_A-2,5y_A+11,5=-2\times2-2,5\times3+11,5=0$
   Donc $A\in(d)$
   Donc **cette équation est une équation cartésienne de** (d)

4. La droite (d') d'équation réduite $y=-0,8x+4,6$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-0,8\end{pmatrix}$ Or, comme $xx'+yy'=1\times4+(-0,8)\times5=0$, le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ est orthogonal à un vecteur directeur de (d')
   Donc $\vec{v}$ est un vecteur normal à (d')
   De plus, $-0,8x_A+4,6=-0,8\times2+4,6=3=y_A$
   Donc $A\in(d')$
   Donc (d) et (d') sont confondues.
   Donc **cette équation est l'équation réduite de** (d)

II) Les Cercles dans le Plan Euclidien

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$
Soit $A(x_A;y_A)$ un point et r un réel positif.
Soit (C) le **cercle** de centre A et de rayon r
Le point $M(x;y)\in(C)$ si et seulement si $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$
Ceci s'appelle une **équation réduite du cercle** (C)

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2+y^2+ax+by+c=0$ correspondent soit :

- à un cercle (C) si $a^2+b^2-4c>0$
- à un point fixe K si $a^2+b^2-4c=0$
- à un ensemble vide $\varnothing$ si $a^2+b^2-4c<0$

Dans le cas où on obtient un cercle (C) , on défini par :

- $x^2+y^2+ax+by+c=0$ **une équation cartésienne du cercle** (C)
- $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ le centre du cercle (C)
- $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ le rayon du cercle (C)

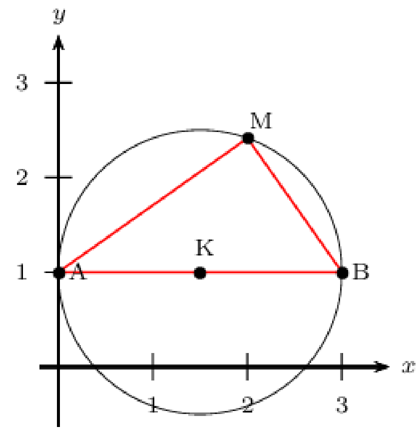
Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit $A(0;1)$, $B(3;1)$ et $M(2;1+\sqrt{2})$ trois points.

1. Montrer que l'équation $(E):x^2+y^2-3x-2y+1=0$ est celle d'un cercle (C) dont on donnera le centre K et le rayon r
2. Montrer que M est sur ce cercle (C)
3. Déterminer une équation du cercle (C') de diamètre $[AB]$
4. Que dire du triangle ABM ?

Corrigé



1. Nous allons écrire l'équation proposée sous la forme $(x-x_K)^2+(y-y_K)^2=r^2$ en appliquant la **méthode de complétion du carré**
   (E) $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2-3x-2y+1=0$ $\Leftrightarrow$ $(x^2-3x)+(y^2-2y)=-1$ $\Leftrightarrow$
   $(x^2-1{,}5)^2-2{,}25+(y^2-1)^2-1=-1$
   $\Leftrightarrow$ $(x-1{,}5)^2+(y-1)^2=2{,}25$
   $\Leftrightarrow$ $(x-1{,}5)^2+(y-1)^2=1{,}5^2$

   Donc (E) est l'équation du cercle (C) de centre $K(1{,}5;1)$ et de rayon $r=1{,}5$

2. On a: $(x_M-1{,}5)^2+(y_M-1)^2=(2-1{,}5)^2+(1+2-1)^2=0{,}25+2=2{,}25$
   Donc M **est sur le cercle** (C)

3. Soit $N(x;y)$. le centre du segment $[AB]$ est $K(1{,}5;1)$
   $N(x;y)$ est sur (C') $\Leftrightarrow$ $KN=\frac{AB}{2}$ $\Leftrightarrow$ $KN=1{,}5$
   donc $(C'):(x-1{,}5)^2+(y-1)^2=2{,}25$
   Ceci est donc une équation de (C')
   On retrouve l'équation (E) .
   Donc les cercles (C) et (C') sont confondus

4. Le point M est donc un point du cercle de diamètre $[AB]$ (distinct de A et de B). Donc **le triangle** ABM **est rectangle en** M

III) Intersections de droites et de cercles dans le PLAN

Propriété

Soient $(d): ax+by+c=0$ et $(d'): a'x+b'y+c'=0$ deux droites du PLAN Euclidien ; on a les 3 cas distincts

- si $ab'-a'b=0$ alors (d) et (d') sont parallèles
  - si de plus $c=c'$ alors (d) et (d') sont confondues
- si $ab'-a'b\neq 0$ alors (d) et (d') sont sécantes en 1 point K

exemples :
étudier l'intersection éventuelle des droites ci-dessous :

a) $(d): x-2y+3=0$ et $(d'): -x+4y-5=0$
b) $(d): 2x-y+1=0$ et $(d'): -x+3y-4=0$
c) $(d): 4x-2y+5=0$ et $(d'): -2x+y=0$

réponses :
a) $(d)\cap(d')=\{(-1;1)\}$; b) $(d)\cap(d')=\{(0{,}2;1{,}4)\}$; c) $(d)\cap(d')=\emptyset$

Propriété

Soient le cercle (C) d'équation réduite $(x-x_K)^2+(y-y_K)^2=r^2$ et la droite (d) d'équation réduite $y=mx+p$; on a les 3 cas distincts

- si l'équation du 2nd degré $(x-x_K)^2+(mx+p-y_K)^2=r^2$ possède une solution unique $(x_0;y_0)$ alors (C) et (d) sont tangents au point $M_0(x_0;y_0)$
- si l'équation du 2nd degré $(x-x_K)^2+(mx+p-y_K)^2=r^2$ possède deux solutions distinctes $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ alors (C) et (d) sont sécants en $M_1(x_1;y_1)$ et $M_2(x_2;y_2)$
- si l'équation du 2nd degré $(x-x_K)^2+(mx+p-y_K)^2=r^2$ ne possède aucune solution alors (C) et (d) sont extérieurs

exemples :
étudier l'intersection éventuelle de la droite (d) et du cercle (C) ci-dessous :

a) $(d): y=-2x+2$ et $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$
b) $(d): y=3-x$ et $(C): x^2+y^2+5x-y+1=0$
c) $(d): 3x-2y+9=0$ et $(C): (x-2)^2+(y-1)^2=13$

réponses :

a) $(d)\cap(C)=\{(1;0);(-0{,}6;3{,}2)\}$ (la droite est sécante au cercle)
b) $(d)\cap(C)=\emptyset$ (la droite est extérieure au cercle)
c) $(d)\cap(C)=\{(-1;3)\}$ (la droite est tangente au cercle)

Propriété

Soient le cercle (C) d'équation cartésienne $x^2+y^2+ax+by+c=0$ et le cercle (C') d'équation cartésienne $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

l'étude de l'intersection éventuelle des 2 cercles (C) et (C') s'effectue par :

- On substitue les 2 équations pour obtenir une équation du type $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$ que l'on simplifie en $y=mx+p$
- on remplace alors y par $mx+p$ dans l'une des 2 équations cartésiennes des cercles (C) ou (C')
- on obtient ainsi une équation du 2nd degré du type $(E): x^2+(mx+p)^2+ax+b(mx+p)+c=0$
  - si l'équation (E) possède une solution unique $(x_0;y_0)$ alors (C) et (C') sont tangents au point $M_0(x_0;y_0)$
  - si l'équation (E) possède deux solutions distinctes $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ alors (C) et (C') sont sécants en $M_1(x_1;y_1)$ et $M_2(x_2;y_2)$
  - si l'équation (E) ne possède aucune solution alors (C) et (d) sont extérieurs ou intérieurs

exemples :
étudier l'intersection éventuelle des droites ci-dessous :

a) $(C): x^2+y^2+2x-y-5=0$ et $(C'): x^2+y^2-8x-6y=0$
b) $(C): (x-2)^2+(y-2)^2=10$ et $(C'): (x+1)^2+(y+4)^2=25$
c) $(C): (x-6)^2+(y+6)^2=32$ et $(C'): (x-5)^2+(y+7)^2=18$
d) $(C): (x-9)^2+(y-2)^2=20$ et $(C'): (x-3)^2+(y+1)^2=5$

réponses :

a) $(C)\cap(C')=\{(4;-2);(-1;3)\}$ (les cercles sont sécants)
b) $(C)\cap(C')=\{(-1;1);(3;-1)\}$ (les cercles sont sécants)
c) $(C)\cap(C')=\{(2;-10)\}$ (les cercles sont tangents intérieurement)
d) $(C)\cap(C')=\{(5;0)\}$ (les cercles sont tangents extérieurement)