Les Exponentielles – 1ère spé maths

A) La fonction Exponentielle

1) Définition

Théorème : Il existe une unique fonction « solution » de l'équation différentielle : $f'(x)=f(x)$ avec $f(0)=1$; on note cette fonction : $f(x)=e^x$ avec $e\simeq 2{,}71828\dots$, appelé « nombre *e* »

Preuve : On admet l'existence de la fonction « exponentielle de base *e* »
Nous allons montrer son unicité

On suppose alors qu'il existe 2 fonctions « exponentielle », notées f_1 et f_2
donc $f_1'(x)=f_1(x)$ et $f_2'(x)=f_2(x)$

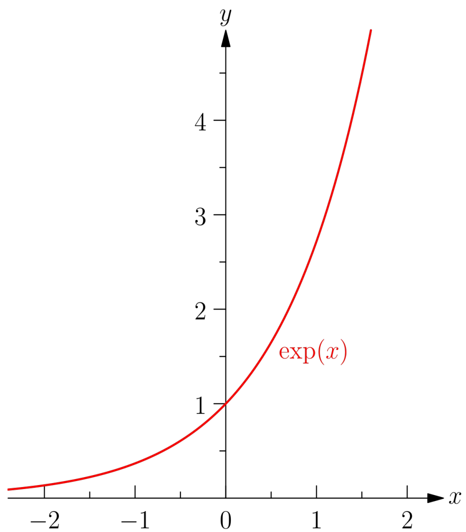
On pose alors $h(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ avec $f_2(x)\neq 0$

On obtient facilement : $h'(x)=0$ donc $h(x)=k$ et $h(0)=1$
donc $\forall x\in\mathbb{R}$: $h(x)=1$ soit encore $f_1(x)=f_2(x)$
donc « *exponentielle* » est unique !

2) Représentation graphique

Conjectures : Soit $f(x)=e^x$ avec $x\in\mathbb{R}$

- $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\neq 0$
- $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)>0$
- la fonction « exponentielle » est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\exp(0)=1$
- la croissance est très lente pour $x<-1$ et très rapide pour $x>1$
- La tangente (T_0) à la courbe C_f au point $A(0\,;1)$ a pour pente la valeur 1
- La tangente (T_1) à la courbe C_f au point $B(1\,;e)$ passe par $O(0\,;0)$



Note : la rapidité de croissance explique le terme de « croissance exponentielle »

3) Propriétés algébriques

Propriété fondamentale : Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$: $e^{a+b}=e^a\times e^b$

Preuve : On pose $g(x)=\dfrac{e^{x+a}}{e^x}$ avec $x\in\mathbb{R}$

ainsi $g'(x)=\dfrac{(e^{x+a})'.e^x-e^{x+a}.(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{e^{x+a}.e^x-e^{x+a}.e^x}{(e^x)^2}=0$

donc pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)=k$ or $g(0)=\dfrac{e^{0+a}}{e^0}=e^a$

donc on déduit l'expression : $g(x)=g(0)=e^a$

donc $\forall x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{e^{x+a}}{e^x}=e^a$ soit $e^{a+b}=e^a\times e^b$

Propriétés : Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ on déduit les relations suivantes

$$e^{-a}=\frac{1}{e^a}\ ;\ e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}\ ;\ (e^a)^b=e^{ab}\ ;\ e^0=1\ ;\ e^1=e$$

Preuves : Soit la fonction g définie par $g(x)=e^x.e^{-x}$
alors $g'(x)=(e^x)'.e^{-x}+e^x.(e^{-x})'=e^x.e^{-x}+e^x.(-e^x)=0$
donc $g(x)=k$ or $g(0)=f^2(0)=1$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$: $g(x)=1$

soit encore, $\forall x\in\mathbb{R}$: $e^x.e^{-x}=1$ soit encore : $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$

on déduit alors $e^{a-b}=e^{a+(-b)}=e^a.e^{-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$

enfin $(e^a)^b=\underbrace{e^a.e^a.\cdots.e^a}_{b\ fois}=e^{a+a+\dots+a}=e^{ab}$

exemples : Simplifier les calculs suivants

$$A=\frac{e^2\times e^{-3}}{e^5}\ ;\ B=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}\ ;\ C=\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2\times e^x}\ ;\ D=\frac{e^x\times e^{-y}}{e^{-x}\times e^y}\ ;\ E=\sqrt{e^{2x}}$$

Rque : Il existe 2 fonctions découlant directement de la fonction « exponentielle »

- le « cosinus hyperbolique » : $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
- le « sinus hyperbolique » : $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

B) Étude de la fonction Exponentielle

1) Dérivation

Définition : On pose $f(x)=e^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=e^x$ par définition de la fonction « exponentielle »

Propriétés :

- la dérivée de « *exp* » ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$
- la dérivée de « *exp* » est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Preuves : on a montré précédemment que $\forall x\in\mathbb{R}$: $e^x . e^{-x}=1$
donc cela signifie que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $e^x\neq 0$
par ailleurs on a : $e^x=e^{2\times 0,5x}=(e^{0,5x})^2$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$: $e^x>0$

2) Sens de variation

Propriété : la fonction « *exp* » est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent la fonction « *exp* » n'admet aucun extremum local

On obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

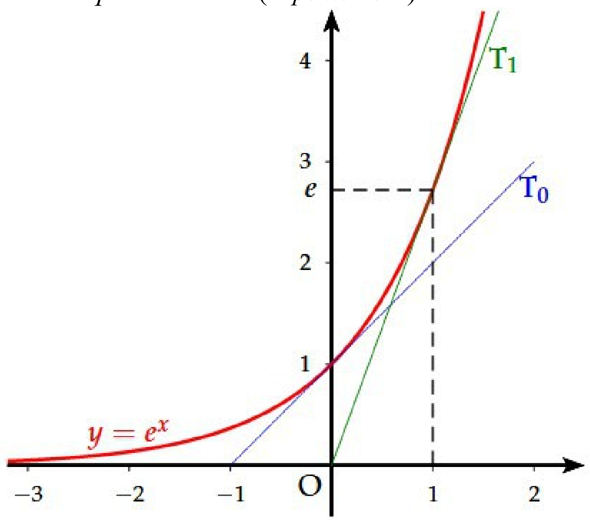
<u>*remarques*</u> : on définit ainsi 3 types de croissance de la fonction « *exp* » :

- sur $]-\infty;0]$ la croissance est « *logarithmique* » ($pente<1$)
- sur $[0;1]$ la croissance est « *linéaire* » ($pente\simeq 1$)
- sur $[1;+\infty[$ la croissance est « *exponentielle* » ($pente>e$)

On vérifie les équations des tangentes à $C_{\exp}$ aux points d'abscisses $a=0$ et $a=e$

$$T_0 : \ y=e^0x+e^0=x-1$$

$$T_1 : \begin{cases} y=e(x-1)+e=ex \\ \text{passe par l'origine} \end{cases}$$



C) Équations & Inéquations exponentielles

1) Équations exponentielles

Propriété : Pour tout réels a et b : $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$

<u>*Exemples*</u> : Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$
$(E_1): e^{-x}-1=0$; $(E_2): e^{-2x+1}=e^{3-x}$; $(E_3): e^{4x-3}=e^{x^2}$
$(E_4): e^{2x-1}+2=0$; $(E_5): e^{2x}-5e^x+6=0$; $(E_6): e^{x+1}=\dfrac{1}{e^{2-x}}$

<u>*Solutions*</u> : $(E_1): e^{-x}-1=0$ donc $e^{-x}=1$ donc $e^{-x}=e^0$ donc $-x=0$ donc $x=0$ donc $S=\{0\}$

$(E_2): e^{-2x+1}=e^{3-x}$ donc $-2x+1=3-x$ donc $-x=2$ donc $x=-2$ donc $S=\{-2\}$

$(E_3): e^{4x-3}=e^{x^2}$ donc $4x-3=x^2$ donc $x^2-4x+3=0$ donc $x=1$ ou $x=3$ (avec Δ) donc $S=\{1;3\}$

$(E_4): e^{2x-1}+2=0$ donc $e^{2x-1}=-2$ ainsi cela est impossible donc $S=\emptyset$

$(E_5): e^{2x}-5e^x+6=0$; on pose $X=e^x$ donc $X^2=e^{2x}$
donc l'équation devient $X^2-5X+6=0$ donc $X=1$ ou $X=5$ (avec Δ)
donc $e^x=1$ ou $e^x=5$ donc $x=0$ ou $x\simeq 1,61$ donc $S=\{0;1,61\}$

Rque : la valeur 1,61 est obtenue avec la touche de la calculatrice $\boxed{\ln 5}$

$(E_6): e^{x+1}=\dfrac{1}{e^{2-x}}$ donc $e^{x+1}\times e^{2-x}=1$ donc $e^{(x+1)\times(2-x)}=e^0$
donc $(x+1)(2-x)=0$ donc $x=1$ ou $x=2$ donc $S=\{1;2\}$

2) Inéquations exponentielles

Propriétés : Pour tout réels a et b : $e^a<e^b \Leftrightarrow a<b$
de même pour tout réels a et b : $e^a>e^b \Leftrightarrow a>b$

<u>*Exemples*</u> : Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$
$(E_1): e^{-x}-1\leqslant 0$; $(E_2): e^{-2x+1}>e^{3-x}$; $(E_3): e^{4x-3}\geqslant e^{x^2}$
$(E_4): e^{2x-1}+2>0$; $(E_5): e^{2x}-5e^x+6\leqslant 0$; $(E_6): e^{x+1}<\dfrac{1}{e^{2-x}}$

Solutions : $(E_1): e^{-x}-1\leqslant 0$ donne $e^{-x}\leqslant 1$ donc $e^{-x}\leqslant e^0$ donc $-x\leqslant 0$ donc $x\geqslant 0$ donc $S=[0\,;+\infty[$

$(E_2): e^{-2x+1}>e^{3-x}$ donc $-2x+1>3-x$ donc $-x>2$ donc $x<-2$ donc $S=]-\infty\,;-2[$

$(E_3): e^{4x-3}\geqslant e^{x^2}$ donc $4x-3\geqslant x^2$ donc $x^2-4x+3\leqslant 0$ donc on obtient avec un tableau de signes : $S=[1\,;3]$

$(E_4): e^{2x-1}+2>0$ donc $e^{2x-1}>-2$ cela est toujours vérifié donc $S=\mathbb{R}$

$(E_5): e^{2x}-5e^x+6\leqslant 0$; on pose $X=e^x$ donc $X^2=e^{2x}$ donc l'inéquation devient $X^2-5X+6\leqslant 0$ donc on obtient avec un tableau de signes : $X\in[1\,;5]$ donc $1\leqslant e^x\leqslant 5$ donc $0\leqslant x\leqslant 1{,}61$ donc $S=[0\,;1{,}61]$

$(E_6): e^{x+1}<\dfrac{1}{e^{2-x}}$ donc $e^{x+1}\times e^{2-x}<1$ donc $e^{(x+1)\times(2-x)}<e^0$ donc $(x+1)(2-x)<0$ donc on obtient avec un tableau de signes : $x<-1$ ou $x>2$ donc $S=]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$

D) Études de fonctions exponentielles

1) Dérivations

Propriétés : On a les formules de dérivations suivantes

- Soit $f(x)=e^{ax+b}$ alors $f'(x)=a\,e^{ax+b}$
- Soit $f(x)=e^{ax^2+bx+c}$ alors $f'(x)=(2ax+b)\,e^{ax^2+bx+c}$
- Soit $f(x)=e^{u(x)}$ alors $f'(x)=u'(x).e^{u(x)}$

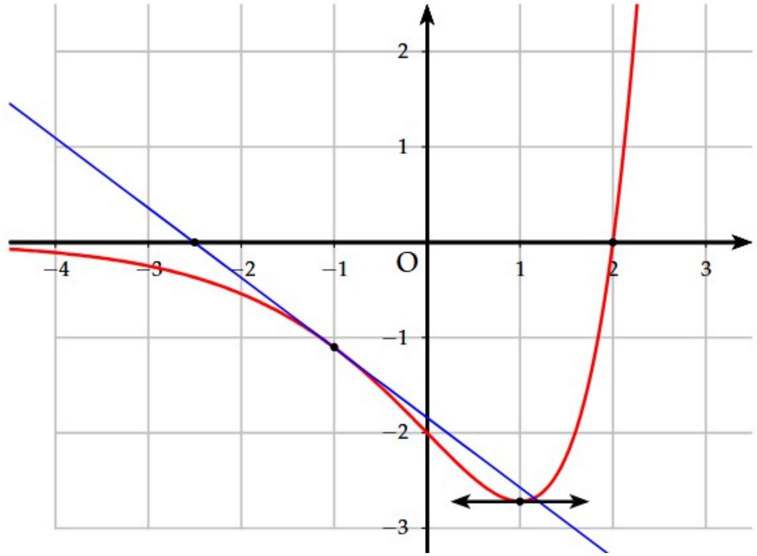
exemples : effectuer les calculs de dérivées

- $f(x)=2e^{-4x+1}+1$ on obtient $f'(x)=-8e^{-4x+1}$
- $f(x)=(e^{-x+2})(e^{2x+1})$ on obtient $f'(x)=e^{x+3}$
- $f(x)=\dfrac{e^{-2x+3}}{e^{1-x^2}}$ on obtient $f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x+2}$
- $f(x)=\sqrt{e^{2-4x^2}}$ on obtient $f'(x)=(-4x)\sqrt{2-4x^2}$
- $f(x)=(e^{-x^2+3x+1})^4$ on obtient $f'(x)=4(-2x+3)(e^{-x^2+3x+1})^3$

2) Étude d'une fonction exponentielle

Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x(x-2)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
2) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer l'équation de la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse (-1).
4) Tracer $\mathscr{C}_f$, T_{-1} dans un repère orthonormé. On précisera la position du minimum. On admettra que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.



Solution :

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables :

$$f'(x)=e^x(x-2)+e^x\times 1=e^x(x-2+1)=e^x(x-1)$$

2) Comme $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0$, on a :

- $f'(x)=0 \iff x=1$
- Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-e$	↗	$+\infty$

3) L'équation de la tangente en (-1) :

$$T_{-1}: y=f'(-1)(x+1)+f(1) \iff y=-2e^{-1}(x+1)-3e^{-1} \iff$$
$$y=-2e^{-1}x-5e^{-1}$$

4) Pour tracer T_{-1}, peut prendre ls points : $(-2,5\,;\,0)$

Pour tracer $\mathscr{C}_f$, on prend les points

$(2\,;\,0)$, $(-1\,;-3e^{-1}) \approx (-1\,;-1,1)$ minimum $(1\,;-e) \approx (1\,;-2,7)$

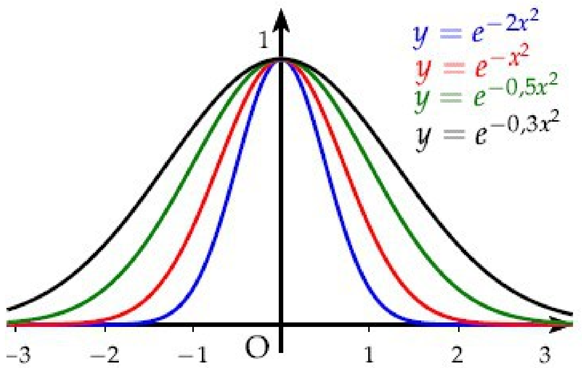
3) Les fonctions de GAUSS

Définition : On appelle « fonction de GAUSS » ou « GAUSSIENNE » une fonction exponentielle du type $f(x)=e^{-kx^2}$ avec $k \in \mathbb{R}^+$

exemple : étudier la fonction GAUSSIENNE $f(x)=e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

la dérivée est $f'(x)=(-2x)e^{-x^2}$; $e^{-x^2}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de l'expression $g(x)=-2x$; on en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



4) Les fonctions LOGISTIQUE

Définition : On appelle « fonction LOGISTIQUE » une fonction exponentielle du type $f(x)=\dfrac{ae^x+b}{ce^x+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

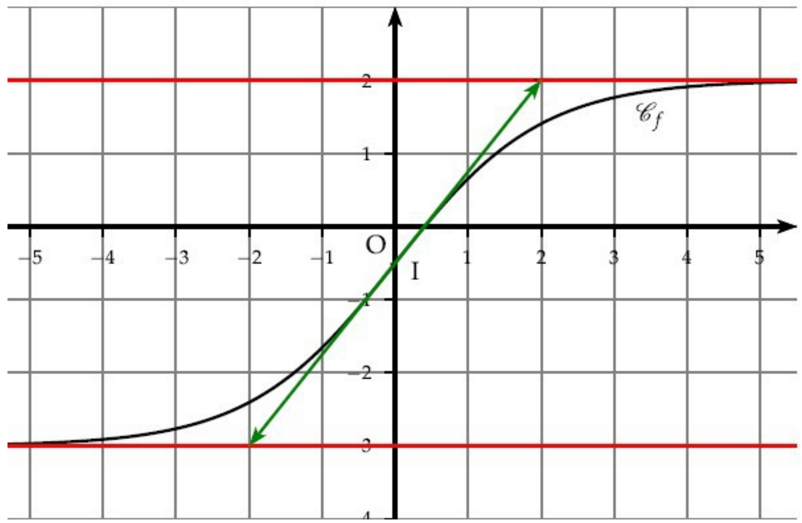
exemple : Soit la fonction $f(x)=\dfrac{2e^x-3}{e^x+1}$ avec $x \in \mathbb{R}$

on obtient $f'(x)=\dfrac{(2e^x)(e^x+1)-(2e^x-3)(e^x)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2}$

or $5e^x>0$ et $(e^x+1)^2>0$ donc $f'(x)>0$

on en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de f'		$+$	
f	-3	$\nearrow$	2



Rque : on observe que les droites $(d): y=-3$ et $(d'): y=2$ sont asymptotes à la courbe C_f ; de plus, le point $I(0\,;-\frac{1}{2})$ est un point d'inflexion de C_f

en effet, l'équation de la tangente à C_f au point I est :

$(T_0): y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$; on vérifie que (T_0) « traverse » la courbe C_f

Enfin, le point $I(0\,;-\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe C_f