Fonctions trigonométriques

I) Rappels

1) Repérage sur le cercle trigonométrique

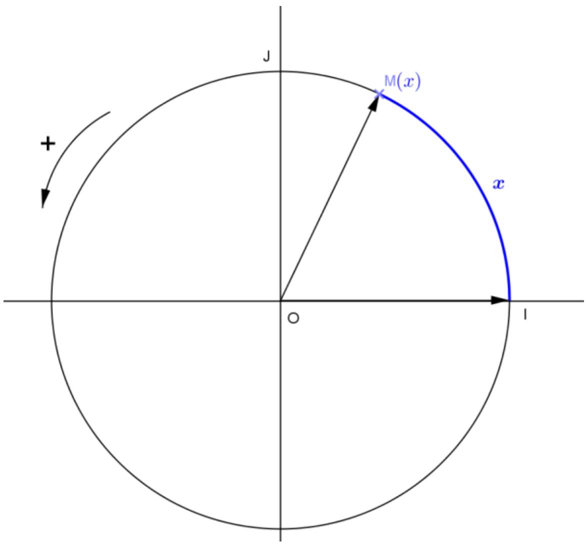
Sur un cercle trigonométrique :

- à tout nombre réel t on associe un point M unique ;

- si un point M est associé à un nombre t alors il est aussi associé à tout nombre t' tel que $t' = t + 2k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$.

• Chacun des nombres précédents est une mesure, en radian de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$

• Parmi toutes ces mesures, il existe une et une seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. Il s'agit de la mesure principale de l'angle orienté des vecteurs $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$



2) Cosinus et sinus d'un nombre

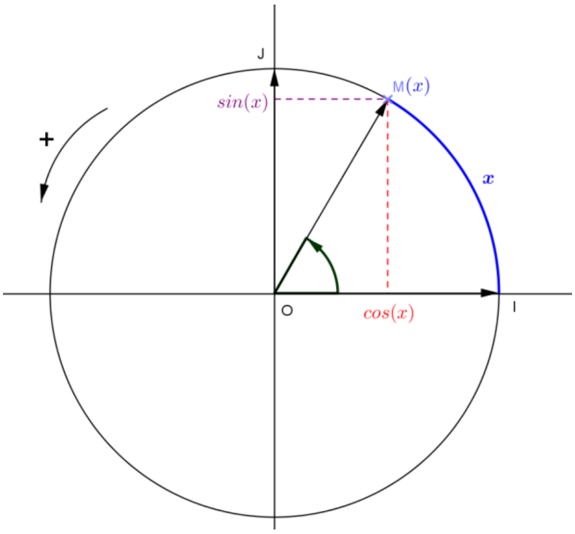
a) Définition :

Soit M un point du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ associé au nombre réel x

Les coordonnées du point M sont : (cos x ; sin x)

Le cosinus de x noté cos x est l'abscisse du point M.

Le sinus de x noté sin x est l'ordonnée du point M.



b) Propriétés :

Pour tout nombre réel x et tout nombre entier relatif k :

- **-1 $\leq$ cos x $\leq$ 1** **-1 $\leq$ sin x $\leq$ 1**
- **cos $(x + 2k\pi)$ = cos x** **sin $(x + 2k\pi)$ = sin x**
- **cos² x + sin² x = 1**

Démonstration (voir cours de 1ere S : cosinus et sinus d'un nombre réel)

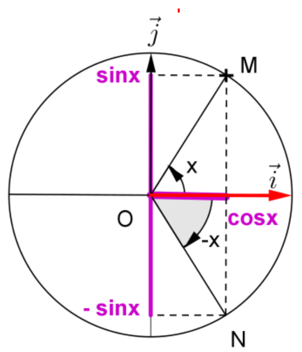
c) Valeurs remarquables

x (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*	*0*

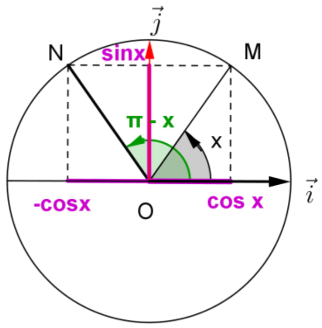
d) Angles associés

Propriété 1 :

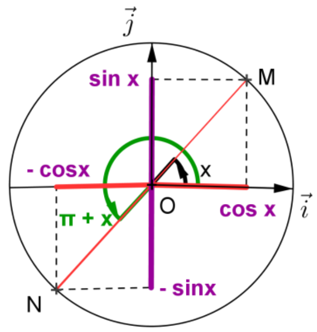
- **cos $(-x)$ = cos x**
  sin $(-x)$ = -sin x
- **cos $(\pi - x)$ = $-$ cos x**
  sin $(\pi - x)$ = sin x
- **cos $(\pi + x)$ = $-$ cos x**
  sin $(\pi + x)$ = $-$ sin x



M et N ont la même abscisse et les ordonnées opposées.



M et N ont la même ordonnée et les abscisses opposées.

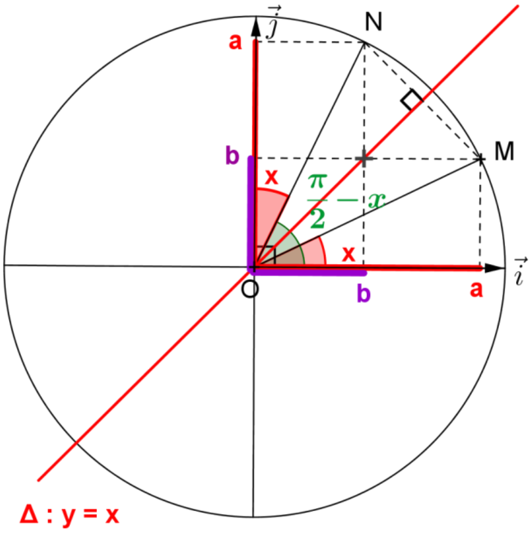


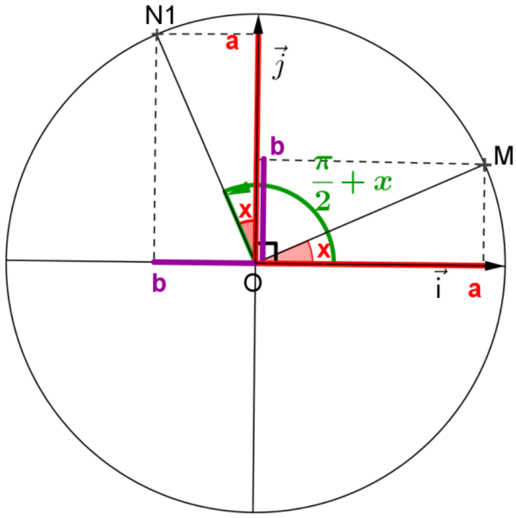
M et N ont les abscisses et les ordonnées opposées.

Démonstration (voir cours de 1ère S : cosinus et sinus d'un nombre réel)

Propriété 2 :

- **cos $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = sin x**
  sin $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = cos x
- **cos $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ = $-$ sin x**
  sin $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ = cos x





-

M et N sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$
Leurs coordonnées sont permutées :
L'abscisse de l'un et l'ordonnée de l'autre et vice-versa.

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = b = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a = \cos x$

N_1 est le symétrique de N (de la figure ci-contre) par rapport à l'axe des ordonnées.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\,b = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a = \cos x$

3) Equations de la forme cos x = cos a

a est un nombre réel donné.

• Si a est différent de 0 + $k\pi$ alors :

L'ensemble des solutions de l'équation cos x = cos a est :

$S = \{a + 2k\pi\,;\, -a + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\,;\,(k' \in \mathbb{Z})\}$

• Si a =0 (2π) alors : cos x = 1 a pour ensemble de solutions :

S = $\{2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\}$

• Si a = π (2π) alors : cos x = -1 a pour ensemble de solutions :

S = $\{\pi + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\}$

Exemples : voir cours de 1ère S Equations trigonométriques

4) Equations de la forme sin x = sin a

a est un nombre réel donné.

• **Si a est différent de** $\frac{\pi}{2}$ (2π) **ou de** $-\frac{\pi}{2}$ (2π) **alors :**

L'ensemble des solutions de l'équation sin x = sin a est :

$S = \{a + 2k\pi\,; \pi - a + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z});\ (k' \in \mathbb{Z})\}$

• **Si a =**$\frac{\pi}{2}$ (2π) **alors : sin x = 1 a pour ensemble de solutions :**

S = $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

• **Si a =**$-\frac{\pi}{2}$ (2π) **alors : sin x = -1 a pour ensemble de solutions :**

S = $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

Exemples : voir cours de 1ère S Equations trigonométriques

5) Formules d'addition

Pour tout nombre réel a et b,

• $cos(a-b) = cosa\,cos\,b + sin\,a\,sinb$

• $cos(a+b) = cosa\,cos\,b - sin\,a\,sinb$

• $sin(a-b) = sina\,cos\,b - cosa\,sinb$

• $sin(a+b) = sina\,cos\,b + cosa\,sinb$

Démonstration et exemples :

Voir cours de 1ère S application du produit scalaire trigonométrie

6) Formules de duplication

Pour tout nombre réel a,

• $cos2a = cos^2a - sin^2\,a = 2\,cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a$

• $sin2a = 2sin\,a\,cosa$

Démonstration et exemples :

Voir cours de 1ère S application du produit scalaire trigonométrie

II) Fonctions sinus et cosinus

1) Définitions

• La fonction qui a tout nombre réel x associe le nombre $cos(x)$ est appelée fonction cosinus

• La fonction qui a tout nombre réel x associe le nombre $sin(x)$ est appelée fonction sinus

Remarques :

Pour tout nombre x, $-1 \leq cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq sin(x) \leq 1$

2) Propriétés

• Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, c'est-à-dire que les réels x et $x + 2k\pi$ ont la même image, pour tout x réel et tout k entiers relatifs.

• La fonction cosinus est paire c'est-à-dire que:
pour tout x réel, $cos(-x) = cos(x)$

• La fonction sinus est impaire c'est-à-dire que:
pour tout x réel, $sin(-x) = -sin(x)$

III) Etude des fonctions cosinus et sinus

1) Dérivées

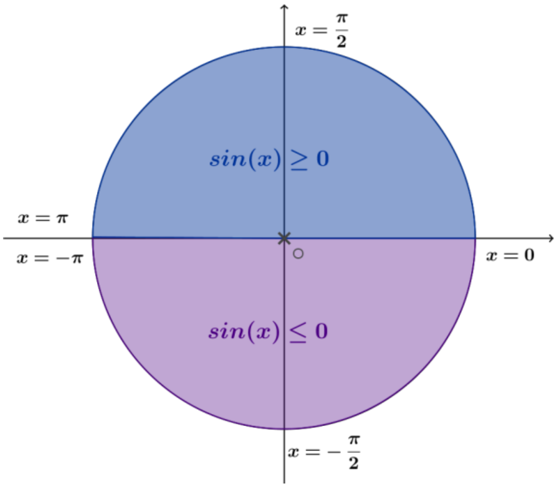
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x :

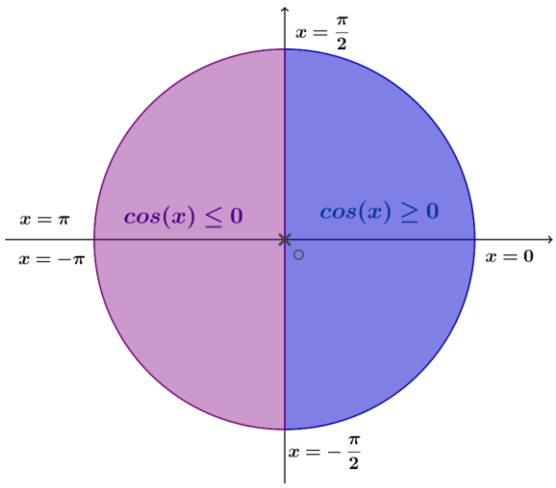
• $sin'(x) = cos(x)$

• $cos'(x) = -sin(x)$

2) Tableau de variation

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.On choisit l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ centré en 0.





x	$-\pi$		0		π
Signe de $sin(x)$		$-$	|	$+$	

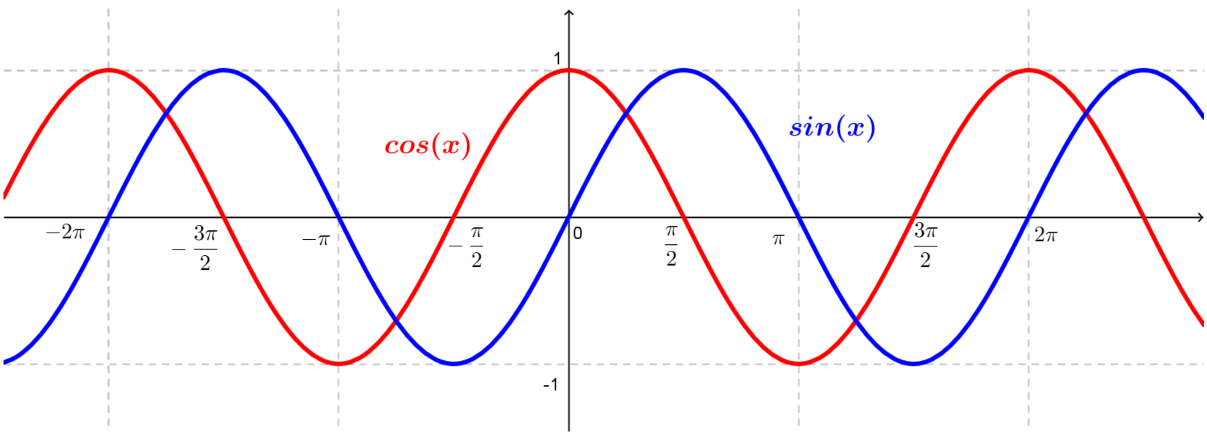
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $cos(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin'(x) = \cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$sin(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	$-\pi$		0		π
$cos'(x) = -\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$cos(x)$	-1	↗	1	↘	1

3) Courbes représentatives

Voici sur le graphique ci-dessous les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus obtenues à partir des propriétés de parité et de périodicité ainsi que les valeurs remarquables connues, vues dans les paragraphes précédents :



IV) Compléments

Théorème 1:

a et b sont deux nombres réels. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(ax+b)$ et $g(x) = cos(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x , $f'(x) = a\,cos(ax+b)$ et $g'(x) = -a\,sin(ax+b)$

Exemples :

$f(x) = sin(4x-2)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4cos(4x-2)$

$g(x) = cos(-5x+3)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 5cos(-5x+3)$

Théorème 2:

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{sin(h)}{h} = 1$$