Le Produit Scalaire – 1ère spé maths

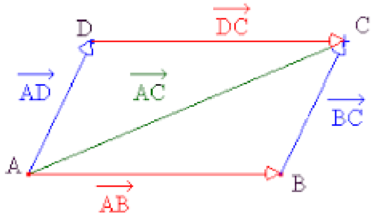
A) Rappels sur les vecteurs

1) Vecteurs égaux

Définition : un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

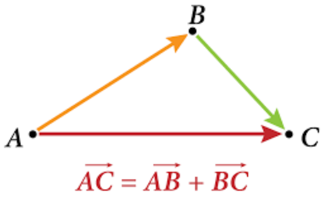
- sa direction : la droite (AB)
- son sens : de A vers B
- sa norme : la longueur AB

De plus si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme

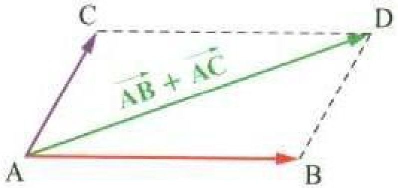


2) Opérations sur les vecteurs

Propriété : La relation de Chasles est donnée par l'égalité vectorielle : Pour tout point A, B, C du plan : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Propriété : la somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ est définie comme la diagonale $\overrightarrow{AD}$ du parallélogramme $ABDC$

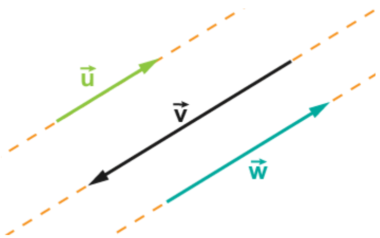


exemples : construire les sommes de vecteurs ci-dessous

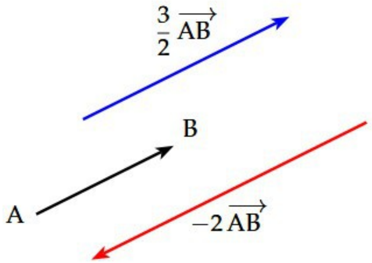
3) Multiplication par un scalaire

Définition : Lorsqu'on multiplie un vecteur $\vec{u}$ par un réel k , appelé *scalaire*, le vecteur $\vec{v}=k.\vec{u}$ est défini par :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même direction
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens si $k>0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires si $k<0$



Note: Si $\vec{v}=k.\vec{u}$ alors on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires*



Propriété : Soit $k, k' \in \mathbb{R}$ alors :

- $k(\vec{u}+\vec{v})=k.\vec{u}+k.\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u}=k.\vec{u}+k'.\vec{u}$
- si $k=0$ alors $k.\vec{u}=\vec{0}$

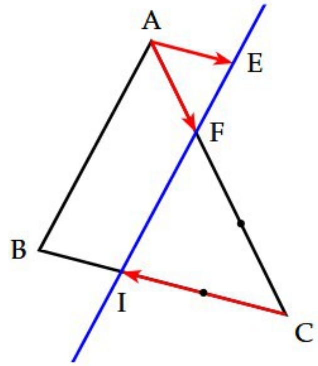
Propriété : Soit A, B, C trois points du plan et $k\in\mathbb{R}^*$, alors :

- Si $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$ alors A, B, C sont alignés
- Si $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{CD}$ alors (AB) et (CD) sont parallèles

exercice : soit ABC un triangle quelconque avec les points E, I, F définis par :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{BC} \quad , \quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{BC} \quad , \quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{BC}$$

Démontrer que les points E, I, F sont alignés



4) Géométrie analytique

Définition : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan alors :

- les coordonnées du milieu K de $[AB]$ sont $K\left(\frac{x_A+y_A}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$
- les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$
- le déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le réel :

$$det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=x y'-x' y$$

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si $det(\vec{u},\vec{v})=0$
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

exemple : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne $A(1;4), B(5;-2)$; calculer les coordonnées du milieu de $[AB]$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

exercice : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(-2;3)$, $B(1;4)$, $C(0;5)$ et $D(2;-5)$

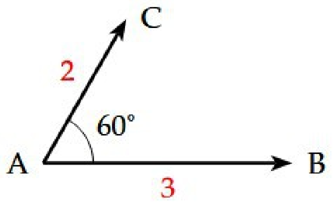
a) Calculer $det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et $det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$
b) les points A, B, C sont-ils alignés ?
c) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

B) Le Produit Scalaire

1) Définition avec l'angle

Définition : On appelle produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\alpha)$ où α représente l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

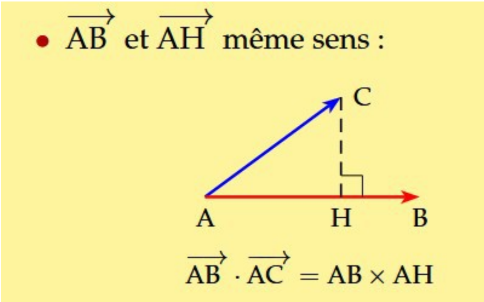
<u>exemples</u> : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec $AB=3$, $AC=2$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60°$
on obtient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\alpha)$
soit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times2\times\cos(60)=3$

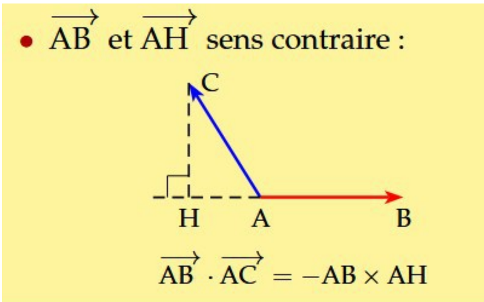


2) Définition avec le projeté orthogonal

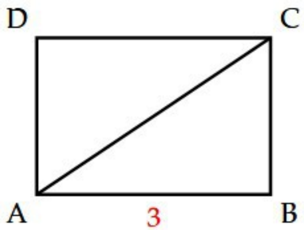
Définition : On donne 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$; soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Alors on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$





<u>exemple</u> : Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB=3$. Le point C se projette orthogonalement en B sur (AB) ;
on note $C\overset{\perp}{\rightarrow}B$
alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times3=9$



<u>remarques</u> : dans le cadre du calcul de $\vec{u}\cdot\vec{v}$

- si $\alpha<90°$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$
- si $\alpha>90°$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$
- si $\alpha=90°$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

C) Propriétés du produit scalaire

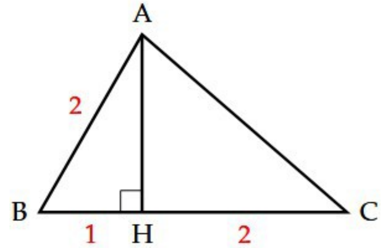
1) Distributivité

Propriétés : Soit les vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et les scalaires a,b ; alors :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (propriété de *symétrie*)
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (propriété de *distributivité*)
- $(a.\vec{u})\cdot(b.\vec{v})=(ab)\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (propriété de *bilinéarité*)

<u>exemple</u> : on donne la figure ci-dessous ;
- calculer $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB}$
- calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(on pourra utiliser la relation de Chasles)



2) Colinéarité & orthogonalité

Propriétés : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ; alors :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

<u>exemple</u> : calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chaque cas :

a) $A(2;-3),B(5;0),C(4;-1)$ colinéaires et de même sens
b) $A(2;-3),B(5;0),C(1;-4)$ colinéaires et de sens contraire
c) $A(2;-3),B(5;0),C(0;-1)$ orthogonaux

<u>rque</u> : on pourra observer que $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|=\vec{u}\cdot\vec{u}=(\vec{u})^2$
ainsi on note que $AB^2=AB\times AB=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB})^2$

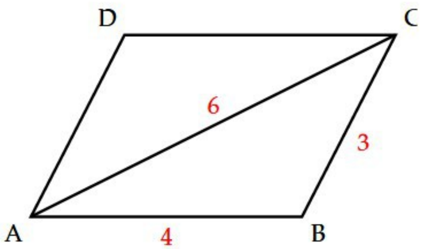
3) Définition avec les normes

Propriétés : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan ; alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$$

preuve : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u})^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+(\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
donc $2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$
donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

exemple : $ABCD$ parallélogramme tel que $AB=4, BC=3$ et $AC=6$
calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$



on obtient :

$$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\frac{1}{2}(\|\vec{AB}+\vec{AD}\|^2-\|\vec{AB}\|^2-\|\vec{AD}\|^2)$$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\frac{1}{2}(\|\vec{AC}\|^2-\|\vec{AB}\|^2-\|\vec{AD}\|^2)$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)=\frac{1}{2}(6^2-4^2-3^2)=5{,}5$

4) Définition avec les coordonnées

Définition : On donne les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ alors on obtient :
$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=(x_B-x_A)\times(x_D-x_C)+(y_B-y_A)\times(y_D-y_C)$

plus généralement si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\,x'+y\,y'$

preuve : on sait que : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

donc $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$, $\|\vec{v}\|^2=(x')^2+(y')^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2$

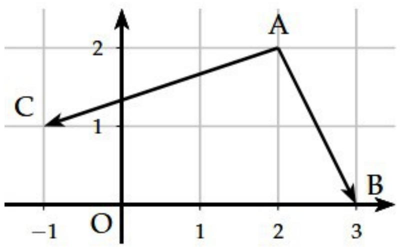
donc $2\vec{u}\cdot\vec{v}=(x+x')^2+(y+y')^2-x^2-y^2-(x')^2-(y')^2$

donc $2\vec{u}\cdot\vec{v}=x^2+2x\,x'+(x')^2+y^2+2y\,y'+(y')^2-x^2-y^2-(x')^2-(y')^2$

donc $2\vec{u}\cdot\vec{v}=2x\,x'+2y\,y'$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\,x'+y\,y'$

exemple : soit $A(-1\,;4), B(2\,;-5)$ et $C(4\,;-3)$ calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

exemple : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$



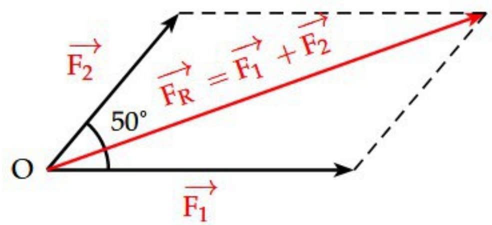
$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=1\times(-3)+(-2)\times(-1)=-1$

D) Applications en Physique

1) Résultantes de 2 forces

exemple : Un point O est soumis à deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ qui forme un angle de $50°$; Les intensités des deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont respectivement $F_1=300\,N$ et $F_2=200\,N$;
Calculer l'intensité de la force résultante $\vec{F}_R$



solution : on a : $\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2=F_1\times F_2\times\cos(\alpha)$ avec $\alpha=50°$

de plus $\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2=\frac{1}{2}(F_R^2-F_1^2-F_2^2)$ car $\vec{F}_R=\vec{F}_1+\vec{F}_2$

donc $F_R^2-F_1^2-F_2^2=2F_1\times F_2\times\cos(\alpha)$

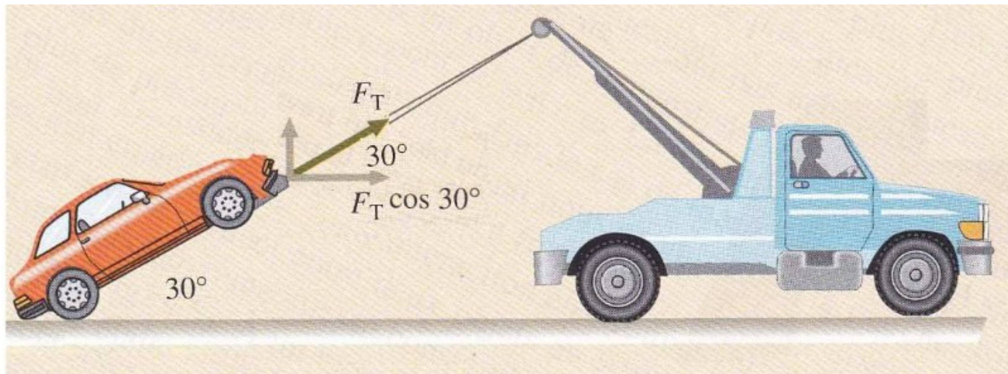
donc $F_R^2=F_1^2+F_2^2+2F_1\times F_2\times\cos(\alpha)$

donc $F_R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1\times F_2\times\cos(\alpha)}$

A.N. : $F_R=\sqrt{300^2+200^2+2\times300\times200\times\cos(50)}\simeq455{,}12\,N$

2) Travail d'une force

exemple : Le travail W d'une force $\vec{F}$ est égale au produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ par le vecteur déplacement $\vec{l}$; soit $W=\vec{F}\cdot\vec{l}$



Une dépanneuse remorque une voiture en panne. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante.

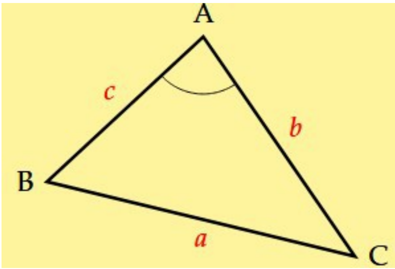
En supposant que le câble fait un angle de 30° avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si elle la remorque sur une distance de 500 m sur cette route en pente.

$$W=\vec{F}_T\cdot\vec{l}=1600\times500\times\cos(30°)\simeq692{,}82\,kJ$$

E) Compléments (vers la Terminale spé maths)

1) Les relations d'Al-Kâshi

Propriété : Soit ABC un triangle quelconque avec $AB=c$, $AC=b$ et $BC=a$ alors on a les relations suivantes :



- $a^2=b^2+c^2-2\times b\times c\times\cos(\hat{A})$
- $b^2=a^2+c^2-2\times a\times c\times\cos(\hat{B})$
- $c^2=a^2+b^2-2\times a\times b\times\cos(\hat{C})$

preuve :

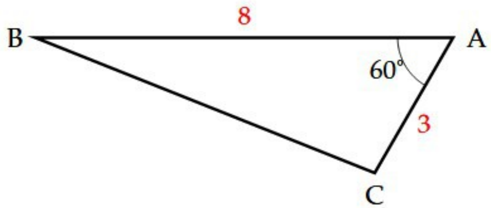
$$a^2=BC^2=(\overrightarrow{BC})^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=(\overrightarrow{BA})^2+2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{AC})^2$$

donc $a^2=AB^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2=b^2+c^2-2\,b\times c\times\cos(\hat{A})$

rque : si $\hat{A}=90°$ alors $\cos(\hat{A})=0$ et on retrouve le *théorème de Pythagore*

exemple : Déterminer BC , $\hat{B}$ et $\hat{C}$

on a : $b=AC=3$, $c=AB=8$, $\hat{A}=60°$



donc $a^2=b^2+c^2-2\times b\times c\times\cos(\hat{A})$

donc $a^2=9+64-48\times\cos(60°)=49$

donc $BC=a=7$

de plus $b^2=a^2+c^2-2\times a\times c\times\cos(\hat{B})$ donc $\cos(\hat{B})=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\times a\times c}$

donc $\cos(\hat{B})=\dfrac{49+64-9}{112}=\dfrac{13}{14}$ donc $\hat{B}=\cos^{-1}\left(\dfrac{13}{14}\right)\simeq21{,}8°$

on déduit alors $\hat{C}\simeq98{,}2°$

2) La formule des Sinus

Propriété : Soit ABC un triangle quelconque avec $AB=c$, $AC=b$ et $BC=a$ alors on a la relation suivante : $\dfrac{\sin(\hat{A})}{a}=\dfrac{\sin(\hat{B})}{b}=\dfrac{\sin(\hat{C})}{c}=\dfrac{2\times S}{a\times b\times c}$

preuve : S représente l'aire du triangle ABC donc $S=\dfrac{AC\times BH}{2}$

donc $2\times S=AC\times AB\times\sin(\hat{A})$ donc $2\times S=b\times c\times\sin(\hat{A})$

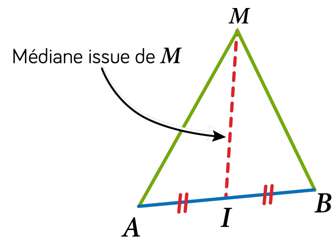
de même $2\times S=b\times a\times\sin(\hat{C})$ et $2\times S=a\times c\times\sin(\hat{B})$

donc $\dfrac{2\times S}{a\times b\times c}=\dfrac{\sin(\hat{A})}{a}=\dfrac{\sin(\hat{B})}{b}=\dfrac{\sin(\hat{C})}{c}$

3) Ensemble de points (ou Lieu géométrique)

Propriété : Soient deux points A et B et leur milieu I , pour tout point M on a la relation :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$$



preuve : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

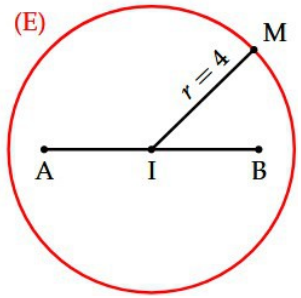
donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$

or I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

de plus $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=(\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\dfrac{-1}{4}AB^2$

donc on déduit que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{1}{4}AB^2$

exemple : Déterminer l'ensemble (E) des points M tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=7$ avec $AB=6$



$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{1}{4}AB^2$ donc $MI^2-\dfrac{6^2}{4}=7$

donc $MI^2=16$ donc $MI=4$

donc M décrit le cercle (C) de centre I et de rayon $r=4$

Propriété **(théorème de la médiane)** : Soient deux points A et B et leur milieu I , pour tout point M on a la relation : $MA^2+MB^2=2\,MI^2+\dfrac{1}{2}AB^2$

preuve : $MA^2+MB^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+IA^2+IB^2$

donc $MA^2+MB^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\vec{0})+\dfrac{AB^2}{4}+\dfrac{AB^2}{4}=2\,MI^2+\dfrac{1}{2}AB^2$