Le programme du lycée sans le blabla, l'algorithmique et les stats - bac 2021

JN

23 octobre 2020

Table des matières

1 Seconde, première et terminale générale

1.1 Analyse

1.1.1 Réels

- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et droite numérique.
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.
- Représentation de l'intervalle $[a-r, a+r]$ puis caractérisation par la condition $|x-a| \leq r$.
- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un réel à 10^{-n} près.
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels.

Démonstrations

- $1/3$ n'est pas décimal.
- $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Facultatif

- Développement décimal illimité d'un réel.
- Périodicité du développement décimal d'un rationnel (et réciproque).

1.1.2 Inégalités

- Sommes d'inégalités, produit d'une inégalité par un réel positif ou négatif.
- Comparer deux quantités en utilisant leur différence ou leur quotient dans le cas strictement positif.
- Résolution d'une inéquation à l'aide d'un tableau de signes.
- Résolution de l'inéquation $f(x) \leq k$ lorsque f est une fonction de référence (carré, inverse, racine carrée ou cube).
- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Variations des fonctions affines, carré, inverse, racine carrée, cube.
- Le coefficient directeur d'une fonction affine est un taux d'accroissement.
- Sens de variation d'une suite.
- Signe d'un trinôme réel.
- Utiliser une étude de fonction (et dérivée) pour établir une inégalité ou résoudre une inéquation.
- Utiliser la convexité pour démontrer des inégalités.
- Positivité et croissance de l'intégrale.

Démonstrations

- Pour tous a, b réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Position relative des courbes d'équation $y = x, y = x^2$ et $y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.
- Inégalité de Bernoulli (preuve par récurrence).

Facultatif

- $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ lorsque a et b sont positifs.
- Lien entre les graphes des fonctions racine carrée et carré sur $\mathbb{R}_+$.
- Inégalité arithmético-géométrique (en utilisant la convexité).
- Encadrement de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par des intégrales.

1.1.3 Dérivée

- Taux de variation.
- Nombre dérivée d'une fonction en un point. Notation $f'(a)$.
- Si f est dérivable en a, la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. $f'(a)$ est la pente de la tangente.
- Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.
- Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, dérivée de $x \mapsto x^n$.
- Non dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.
- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée.
- Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle.
- Nombre dérivé en un extremum (en un point intérieur à l'intervalle). Tangente horizontale.
- Dérivée de $v \circ u$.
- Dérivée seconde.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe et des sécantes.
- Lorsque f est deux fois dérivable, f est convexe ssi $f'' \geq 0$ ssi f' croissante ssi le graphe de f est au dessus de ses tangentes.
- Point d'inflexion.

Démonstrations

- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Fonction dérivée d'un produit.
- Lorsque f'' est positive, le graphe de f est au dessus de ses tangentes.

Facultatif

- Dérivée n-ième d'une fonction.

1.1.4 Fonction exponentielle

- $\exp$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Relation $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$.
- Nombre e, notation e^x.
- Pour tout réel a, $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison e^a.
- Signe, sens de variation et graphe de la fonction $\exp$.
- Variations et graphe de $x \mapsto e^{-kt}$ et $x \mapsto e^{kt}$ lorsque $k > 0$.

Facultatif

- Unicité de f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Démonstration de la relation $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- Démonstration de la stricte croissance et positivité de $\exp$.
- Limites de $\exp$ en $\pm\infty$.
- Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et $\exp$ en $+\infty$.

1.1.5 Fonction logarithme

- $\ln$ est réciproque de $\exp$.
- Propriétés algébriques usuelles. Dérivée, variations.
- Limite en 0 et $+\infty$. Graphe.Lien entre les graphes de $\ln$ et $\exp$.
- Croissance comparée de $\ln$ et $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

Démonstrations
- Dérivée de $\ln$ (dérivabilité admise).
- Limite en 0 de $x \mapsto x\ln(x)$.

Facultatif
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, fonction $x \mapsto x^\alpha$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, limite de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ quand $n \to +\infty$.

1.1.6 Limites

- Définition de $(u_n) \to +\infty$.
- Suite tendant vers $-\infty$.
- $(u_n) \to \ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Cas des suites géométriques.
- Théorème de limite monotone.
- Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$, en un point. Asymptote.
- Limites des fonctions puissances entières, racine carrée, exponentielle.
- Limites et comparaison. Théorème des gendarmes.
- Opérations.
- Continuité en un point, sur un intervalle.
- La dérivabilité implique la continuité.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.
- Étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue d'un intervalle vers lui-même.

Démonstrations
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n) (avec l'inégalité de Bernoulli).
- Théorème de comparaison dans le cas $+\infty$.

Facultatif
- Suites adjacentes.
- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Méthode de Newton et méthode de Héron.
- Asymptotes obliques. Branches infinies.
- Fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y.
- Prolongement par continuité.
- Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires.

1.1.7 Primitives et équations différentielles

- Primitive d'une fonction continue f : une solution de l'équation $y' = f$.
- Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, $\sin, \cos$.
- Équation différentielle $y' = ay + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Utilisation de $(v \circ u)' = v' \circ u \times u'$ pour un calcul de primitive.
- Utilisation d'une solution particulière de $y' = ay + f$ pour déterminer toutes les solutions.

Démonstrations
- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$.

1.1.8 Calcul intégral

- Soit f continue et positive sur $[a,b]$. Définition de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme l'aire sous la courbe.
- Relation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ lorsque F est une primitive de f. Notation $\Big[F(x)\Big]_a^b$.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque f est une fonction continue sur un intervalle contenant a et b.
- Linéarité. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.

Démonstrations
- Si f est continue, positive sur $[a,b]$, alors $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.
- Intégration par parties.

Facultatif
- Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes.
- Méthode des rectangles, des milieux, des trapèzes.

1.2 Algèbre

1.2.1 Combinatoire

- Couple, triplet, k-uplet ou k-liste.
- Produit cartésien de deux, trois, k ensembles. Ensemble A^k des k-listes d'élements de A.
- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion disjointes.
- Principe multiplicatif : nombre de k-listes d'un ensemble à n éléments.
- Nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec $\{0,1\}^n$. Lien avec le nombre de mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments.
- Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Notation $\dbinom{n}{k}$ pour le nombre de parties (=combinaisons) à k éléments d'un ensemble à n éléments.
- Formule $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Explicitation pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Formule d'addition et triangle de Pascal.

Démonstrations
- Preuve par dénombrement de la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- Preuves par le calcul et par le dénombrement de la formule d'addition (= relation de Pascal).

Facultatif
- Nombre de combinaisons avec répétition.

1.2.2 Arithmétique

- Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
- Définition des notions de multiple, de diviseur, de nombre pair et impair.
- Fraction irréductible.
- Nombre premier.

Démonstrations
- Une somme de multiples de a est un multiple de a.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

1.2.3 Calculs

- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées.
- Relation $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Identités remarquables

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

- Résoudre une équation du premier degré.
- Notation $\sum$.

Démonstrations
- Pour tous réels positifs a, b on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Illustration géométrique de $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ lorsque a et b sont positifs.
- Terme général d'une suite arithmétique, géométrique.
- Calcul de $1 + 2 + ... + n$.
- Calcul de $1 + q + ... + q^n$.

Facultatif
- Développement de $(a+b+c)^2$ et $(a+b)^3$.
- Somme des n premiers carrés, des n premiers cubes.
- Factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$, de $x^n - a^n$ par $x - a$.

1.2.4 Fonctions

- Vocabulaire de base : antécédent et image.
- Fonctions linéaires, affines et représentation graphiques.
- Une fonction définie sur $\mathbb{N}$ est une suite.
- Hormis le cas précédent, les fonctions seront à valeurs réelles, définies sur un intervalle non trivial ou un réunion finie d'intervalles (non triviaux) de $\mathbb{R}$.
- Courbe représentative.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
- Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et graphes.
- Résolution de $f(x) = k$ lorsque f est la fonction carré, inverse, racine carrée ou cube.
- Composée de deux fonctions. Notation $v \circ u$.
- Bijection : en analyse, en dénombrement, en géométrie (de $\mathbb{R}^2$ vers le plan ou de $\mathbb{R}^3$ vers l'espace).

Facultatif
- Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

1.2.5 Suites

- Définition d'une suite par une formule explicite du type $u_n = f(n)$.
- Définition d'une suite par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Suites arithmétiques, géométriques.
- Factorielle d'un entier naturel.

Facultatif
- Suite de Fibonacci.
- Suite de Syracuse.

1.2.6 Second degré

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle.
- Axe de symétrie et sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Démonstrations
- Résolution d'une équation du second degré.

Facultatif
- Factorisation d'un polynôme du troisième degré admettant une racine.
- Déterminer deux réels connaissant leur somme s et leur produit p comme racines de la fonction $x \mapsto x^2 - sx + p$.
- Expliciter l'intersection d'un cercle ou d'une parabole avec une droite parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées.

1.3 Géométrie (plane et dans l'espace)

1.3.1 Vecteurs

- Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'. Direction, sens et norme.
- Égalité de deux vecteurs. Vecteur nul.
- Somme de deux vecteurs (lien avec la composée de deux translations). Relation de Chasles.
- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur, d'une somme de vecteurs. Expression de la norme.
- Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.
- Produit d'un vecteur par un réel. Coordonnées. Colinéarité de deux vecteurs.
- **Plan** Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement et au parallélisme.
- Coordonnées du milieu d'un segment.
- Produit scalaire. Définition (équivalentes) par la projection orthogonale ou par le cosinus.
- Bilinéarité, symétrie.
- Expression du p.s. en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Critère d'orthogonalité. Utilisation pour calculer un angle.
- Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
- Transformations de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Démonstration
- Deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- Formule d'Al-Kashi (avec le produit scalaire).
- Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Facultatif
- Définition vectorielle des homothéties.
- Loi des sinus.
- Barycentre d'une famille d'un système pondéré de $2, 3$ ou 4 points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
- Fonction vectorielle de Leibniz.

1.3.2 Trigonométrie

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigo. Image d'un réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le $\cos$ et le $\sin$ dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Parité, périodicité, graphe des fonctions $\cos$ et $\sin$.
- Relations usuelles entre $\cos(x), \sin(x)$ et $\cos, \sin$ de $\pi \pm x$, $\dfrac{\pi}{2} \pm x$.

- Dérivées et variations de $\cos$ et $\sin$.
- Équation $\cos(x) = a$ et inéquation $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$.

Démonstration

- Calcul de $\sin \dfrac{\pi}{4}, \cos \dfrac{\pi}{3}, \sin \dfrac{\pi}{3}$.

Facultatif

- Fonction tangente.

1.3.3 Droites et cercles dans le plan

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne et équation réduite.
- Pente d'une droite non verticale.
- Vecteur normal à une droite. Équation d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.
- Le vecteur non nul de coordonnées (a, b) est normale à la droite d'équation $ax + by = c$ et le vecteur $(-b, a)$ en est un vecteur directeur.
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite. En déterminer les coordonnées.
- Équation d'un cercle. Forme à reconnaitre (retrouver le centre et le rayon).

Démonstrations

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.
- Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de Δ le plus proche de M.
- Relation $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ dans un triangle rectangle.

Facultatif

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.
- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Formule $\dfrac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ pour l'aire d'un triangle.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.
- Droite d'Euler d'un triangle.
- Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

1.3.4 Droites, plans, sphère dans l'espace

- Définition d'une droite dans l'espace par point et vecteur directeur. Représentation paramétrique.
- Sphère.
- Plan de l'espace. Direction d'un plan.
- Caractérisation d'un plan par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- Vecteur normal à un plan. Définition d'un plan par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.Équation cartésienne.
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite, un plan. Distance d'un point à une droite ou à un plan. Coordonnées.
- Orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan.
- Plan médiateur de deux points distincts.
- Résolution d'un système linéaire pour montrer que trois vecteurs sont linéairement indépendants.

Démonstration

- Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de $\mathcal{P}$.
- Équation cartésienne du plan normal au vecteur non nul $\vec{n}$ et passant par le point A.

Facultatif

- Intersection d'une sphère et d'un plan, d'une sphère et d'une droite. Plan tangent à une sphère en un point.
- Sphère circonscrite à un tétraèdre.
- Intersection de deux plans.
- Déterminer un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
- Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon.

1.4 Probabilités

1.4.1 Sans variables aléatoires

- Ensemble (fini) des issues (univers). Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi de probabilité. Probabilité d'un évémement : somme des probabilités des issues.
- Relation $\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
- Probabilité de B sachant A (lorsque $\mathbf{P}(A) \neq 0$). Notation $\mathbf{P}_A(B)$.
- Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre (ou un tableau).
- Successions de n épreuves indépendantes. La probabilité d'une issue $(x_1, ..., x_n)$ est le produit des probabilités des composantes x_i. Représentation par un arbre.

Facultatif

- Succession de plusieurs épreuves indépendantes.
- Exemples de marches aléatoires.

1.4.2 Variables aléatoires

- Variable aléatoire réelle : fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une v.a.
- Espérance, variance et écart-type.
- Notations $\{X = a\}, \{X \leq a\}, \mathbf{P}(X = a), \mathbf{P}(X \leq a), \mathbf{P}(k \leq X \leq k')$.
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli (répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes).
- Loi binomiale : loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.
- Somme de deux v.a. Linéarité de l'espérance.
- $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ lorsque X et Y sont indépendantes (*i.e.* issues d'épreuves indépendantes). Relation $V(aX) = a^2V(X)$.
- Espérance, variance et écart type de la loi binomiale.
- Existence d'une liste $(X_1, ..., X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi donnée. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + ... + X_n$ et de la moyenne $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- On reprend les notations d'un point précédent. On note $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ et $V = V(X_1)$. Pour tout $\delta > 0$, $\mathbf{P}\Big(|M_n - \mu| \geq \delta\Big) \leq \dfrac{V}{n\delta^2}$.
- Loi des grands nombres.

Démonstrations

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.
- Espérance et variance de la loi binomiale.

Facultatif

- Formule de König-Huygens.
- Étude de $x \mapsto \mathbf{E}((X - x)^2)$.
- Loi géométrique.

- Loi de Poisson comme limite de lois binomiales.
- Relation $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ pour des variables aléatoires indépendantes X, Y. Application à la variance de $X + Y$.

1.5 Logique élémentaire

- Élément d'un ensemble. Sous-ensemble.
- Couple.
- Appartenance et inclusion. Notations $\in$ et $\subset$.
- Réunion et intersection. Notations $\cup$ et $\cap$.
- Complémentaire de A dans E. Notations $\overline{A}$ ou $E \setminus A$.
- Connecteurs logiques "et", "ou".
- Raisonnements par disjonction des cas.
- Raisonnements par l'absurde.
- Raisonnement par contraposée.
- Raisonnement par récurrence.
- Raisonnement par équivalence.
- Produire un contre exemple pour montrer qu'une proposition est fausse.
- Ensemble des solutions d'une équation (ou d'une inéquation).
- Utiliser les quantificateurs. Les notations $\forall$ et $\exists$ sont non exigibles.
- Identifier le statut des lettres utilisées (variable, inconnue, paramètre).
- Formuler la négation de propositions éventuellement quantifiées.
- Distinguer condition nécessaire et condition suffisante.

2 Maths expertes : terminale

2.1 Nombres complexes

2.1.1 Point de vue algébrique

- Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et imaginaire. Opérations.
- Conjugaison. Propriétés algébriques.
- Inverse d'un complexe non nul.
- Résolution de l'équation $az = b$.

Démonstrations

- Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière.
- Formule du binôme de Newton.

2.1.2 Point de vue géométrique

- Image d'un nombre complexe, du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur.
- Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.
- Ensemble $\mathbb{U}$. Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et inverse.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.
- Forme trigonométrique.
- Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$.
- Racines n-ièmes de l'unité. Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique. Cas particuliers : $n = 2, 3, 4$.
- Caractérisation de l'alignement, de l'orthogonalité. Calculs de longueurs, d'angles.
- Lien entre $\mathbb{U}_n$ et les polygones réguliers.

Démonstration

- Formule $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit. Module d'une puissance.
- Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$.

Facultatif

- Récurrence $z_{n+1} = az_n + b$.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
- Lignes trigonométriques de $\dfrac{2\pi}{5}$. Construction du pentagone régulier à la règle et au compas.
- Somme des racines n-ième de l'unité.
- Racines n-ième d'un nombre complexe.
- Transformée de Fourier discrète.

2.1.3 Trigonométrie

- Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire.
- $e^{i\theta}$. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe.
- Formule de Moivre et d'Euler. Utilisation pour des calculs d'intégrales, des études de suites.

Démonstrations

- Démonstration de l'une des formules d'addition.

2.1.4 Équations polynomiales

- Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels.

Démonstrations

- Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. Factorisation de $P(z)$ par $z - a$ si $P(a) = 0$.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Facultatif

- Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes.
- Equation du troisième degré.

2.2 Arithmétique

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$.
- Congruences et compatibilité avec les opérations.
- Algorithme d'Euclide. PGCD de deux entiers. Calcul d'un couple de Bezout.
- Couples d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bezout. Lemme de Gauss.
- Nombres premiers. Crible d'Ératosthène.
- Décomposition en facteurs premiers.
- Petit théorème de Fermat.
- Résolution de $ax \equiv b[n]$. Déterminer un inverse de a modulo n lorsque $a \wedge n = 1$.
- Tests usuels de divisibilités.
- Résolution d'équations diophantiennes simples.

Démonstrations

- Écriture du pgcd de a, b sous la forme $ax + by$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
- Théorème de Gauss.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.

Facultatif

- Détermination des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.
- Lemme chinois.
- Démonstration du petit théorème de Fermat.
- Exemples simples de codes correcteurs.
- Étude de RSA.
- Détermination des triplets pythagoriciens.
- Étude des sommes de deux carrés par les entiers de Gauss.
- Équation de Pell-Fermat.

2.3 Graphes et matrices

- Graphe, sommets, arêtes. Graphe complet.
- Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe. Chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe.
- Matrice (à coefficients réels). Matrice carrée, colonne, ligne. Opérations. Inverse et puissance d'une matrice carrée.
- Matrice d'adjacence d'un graphe, matrice asociée à un système linaire, à une récurrence linéaire.
- Récurrence $U_{n+1} = AU_n + C$.
- Graphe orienté pondéré associé à une chaine de Markov à deux ou trois états.
- Chaine de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne Π_0. Matrice de transition, graphe pondéré associé.
- Pour une chaine de Markov à deux ou trois états de matrice P, interprétation du coefficient (i, j) de P^n. Distribution après n transitions, représentée comme la matrice ligne $\Pi_0 P^n$.
- Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états.

Démonstrations

- Expression du nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets d'un graphe à l'aide de la puissance n-ième de la matrice d'adjacence.
- Pour une chaîne de Markov, expression de la probabilité de paser de l'état i à l'état j en n transitions, de la matrice ligne représentant la distribution après n transitions.

Facultatif

- Étude de graphes eulériens.
- Interpolation polynomiale.
- Marche aléatoire sur un graphe. Étude asymptotique.
- Modèle de diffusion d'Ehrenfest.
- Modèle proie - prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.
- Algorithme PageRank.