Calcul Numérique - 2nde

A) Les nombres entiers

Partie 1 : Multiples et diviseurs

Définition : Soit a et b deux entiers naturels.
On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.

Remarque : On dit alors que b est un **diviseur** de a.

Exemple :
15 est un multiple de 3, car $15 = k \times 3$ avec $k = 5$.

Méthode : Démontrer qu'un nombre est un multiple ou un diviseur
Vidéo https://youtu.be/umlnJooSDas

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) 36 est un multiple de 12
b) 28 est un multiple de 8
c) 6 est un diviseur de 54
d) 7 est un diviseur de 24

Correction :

1) **VRAI** : 36 est un multiple de 12, car 36 = k × 12 avec k = 3
2) **FAUX** : 28 n'est pas un multiple de 8 car il n'existe pas d'entier k tel que 28 = k × 8
3) **VRAI** : 6 est un diviseur de 54, car 54 = k × 6 avec k = 9
4) **FAUX** : 7 n'est pas un diviseur de 24 car il n'existe pas d'entier k tel que 24 = k × 7

Propriété : La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Exemple :
700 et 21 sont des multiples de 7 donc :
721 = 700 + 21 est un multiple de 7.

Démonstration au programme : avec a = 3
Vidéo https://youtu.be/4an6JTwrJV4

Démontrons que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3.
Soit a et b deux multiples de 3.
Comme a est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $a=3k_1$
de même b est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $b=3k_2$
ainsi $a+b=3k_1+3k_2=3(k_1+k_2)=3k$ donc $a+b$ est multiple de 3

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs
Vidéo https://youtu.be/7nU2M-zhAjk

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3

Correction
Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme :
n, $n+1$ et $n+2$, où n est un entier quelconque.
Leur somme est :
$S = n + (n+1) + (n+2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n+1)$.

Donc $S = k \times 3$, avec $k = n + 1$ entier.
On en déduit que S est un multiple 3.

Partie 2 : Nombres pairs, nombres impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples :
- 34 est pair, car c'est un multiple de 2, on a $34 = 17 \times 2$
- 57 est impaire car il n'existe pas d'entier k tel que $57 = k \times 2$.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Exemples :
- $34 = 2 \times k$, avec $k = 17$.
- $57 = 2 \times k + 1$, avec $k = 28$.

Propriétés :

Écrit de façon abrégée, on a :

PAIR + PAIR → PAIR
PAIR + IMPAIR → IMPAIR
IMPAIR + IMPAIR → PAIR

PAIR x NOMBRE → PAIR
IMPAIR x IMPAIR → IMPAIR

Méthode : Déterminer la parité d'un nombre
Vidéo https://youtu.be/cE3gOMZ0Kko

Quelle est la parité de $5\,678\,984^2+1$?

Correction

$$5\,678\,984^2 = \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}} \times \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}}$$

Donc $5\,678\,984^2$ est pair car PAIR × PAIR → PAIR

On peut donc écrire $5\,678\,984^2 = 2k$, avec k entier.
Et donc :
$5\,678\,984^2 + 1 = 2k + 1$ est impair.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair

Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/eKo1MpX9ktw

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k + 1$, avec k entier.
Donc $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

- Vidéo https://youtu.be/xCLLqx11Le0
- Vidéo https://youtu.be/3Gv_z0pM9pM

Exc : Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Correction
Soit deux entiers consécutifs n et $n + 1$.

- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k_1, avec\ k_1 = k(2k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2k_2$, avec $k_2 = (2k+1)(k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Partie 3 : Nombres premiers (Rappels)

Définition : Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Cette liste est infinie.
Remarque : Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Méthode : Démontrer qu'un nombre est premier
Vidéo https://youtu.be/kLs0Tilz7lc

Exc : Vérifier si le nombre 97 est premier

Règles de divisibilité (rappels) :
2 : Le chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6, 8).
3 : La somme des chiffres est divisible par 3.
5 : Le chiffre des unités est 0 ou 5.
9 : La somme des chiffres est divisible par 9.
10 : Le chiffre des unités est 0.

Correction
On cherche tous les diviseurs éventuels de 97 jusqu'à $\sqrt{97}$. Il n'est pas nécessaire de tester tous les entiers inférieurs à 97
on observe que $\sqrt{97} \simeq 9{,}8$
donc on va donc tester les entiers de 2 à 9.

- **2 :** Non ! 97 ne se termine pas par un chiffre pair.
- **3 :** Non ! 9+7=16 et 16 n'est pas divisible par 3.
- **4 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 4.
- **5 :** Non ! 97 ne se termine pas par 0 ou 5.
- **6 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 6.
- **7 :** Non ! 70+28=98. 70 et 28 sont divisibles par 7, donc 98 l'est et 97 ne l'est pas.
- **8 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 8.
- **9 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 3, ne l'est pas par 9.

97 n'est divisible par aucun des entiers de 2 à 9.
Donc 97 est un nombre premier.

Propriété : Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. L'ordre des facteurs n'a pas d'importance.

Exemple : $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Méthode : Rendre une fraction irréductible
Vidéo https://youtu.be/qZaTliAWkA0

Exc : Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$

Correction
Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 :

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$

10 et 21 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 et donc :

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

B) Les Fractions, Puissances & Racines carrées

Partie 1 : Fractions

1) Calcul avec les fractions (Rappels)

Propriétés :

$$\frac{a}{D} + \frac{b}{D} = \frac{a+b}{D} \qquad \frac{a}{D} - \frac{b}{D} = \frac{a-b}{D} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Méthode : Effectuer des calculs de fractions
Vidéo https://youtu.be/1yV5scwCwvg

$$A = \frac{5}{4} + \frac{6}{16} \qquad B = \frac{5}{3} - \frac{6}{5} \qquad C = \frac{2}{-3} \times \frac{-5}{11} \qquad D = \frac{3}{4} : \frac{-5}{8} \qquad E = \frac{8}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{5}{3}$$

Correction

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{4} + \frac{6}{16} \\ &= \frac{5\times4}{4\times4} + \frac{6}{16} \\ &= \frac{20}{16} + \frac{6}{16} \\ &= \frac{20+6}{16} \\ &= \frac{26}{16} \\ &= \frac{13}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{5}{3} - \frac{6}{5} \\ &= \frac{5\times5}{3\times5} - \frac{6\times3}{5\times3} \\ &= \frac{25}{15} - \frac{18}{15} \\ &= \frac{25-18}{15} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{-3} \times \frac{-5}{11} \\ &= \frac{2\times(-5)}{(-3)\times11} \\ &= \frac{-10}{-33} \\ &= \frac{10}{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{3}{4} : \frac{-5}{8} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{8}{-5} \\ &= \frac{24}{-20} \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{8}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{5}{3} \\ &= \frac{8}{7} - \frac{20}{21} \\ &= \frac{24}{21} - \frac{20}{21} \\ &= \frac{4}{21} \end{aligned}$$

Ma cafetière contenait un litre de café .

Alfred en a bu les $\frac{3}{5}$ quand je dormais

et Hector les $\frac{2}{7}$ pendant que je téléphonais .

Quelle fraction de litre m'en reste t-il ?

2) Réduire des expressions au même dénominateur

Propriété :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Méthode : Réduire au même dénominateur
Vidéo https://youtu.be/Id_udNTKsql

Réduire les expressions suivantes au même dénominateur :

$$A=\frac{7}{\quad 2}-\frac{5}{3} \qquad B=3+\frac{5x}{2x+1}$$

Correction

$$A=\frac{7}{x-2}-\frac{5}{3}$$
$$=\frac{7\times 3}{(x-2)\times 3}-\frac{5(x-2)}{3(x-2)}$$
$$=\frac{21-5(x-2)}{3(x-2)}$$
$$=\frac{21-5x+10}{3(x-2)}$$
$$=\frac{31-5x}{3(x-2)}$$

$$B=3+\frac{5x}{2x+1}$$
$$=\frac{3}{1}+\frac{5x}{2x+1}$$
$$=\frac{3(2x+1)}{1(2x+1)}+\frac{5x}{2x+1}$$
$$=\frac{3(2x+1)+5x}{2x+1}$$
$$=\frac{6x+3+5x}{2x+1}$$
$$=\frac{11x+3}{2x+1}$$

Partie 2 : Puissances

1. Rappels

$a^4=a\times a\times a\times a$

De façon générale :

$$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times a\times \ldots\times a}_{n \text{ fois}}$$

Exemples :
$2^3=2\times 2\times 2$
$11^5=11\times 11\times 11\times 11\times 11$

a est un nombre non nul et
n est un entier non nul.
$a^1=a$
$a^0=1$
$0^n=0$
$1^n=1$

Exemples :
$15^1=15$
$103^0=1$
$0^4=0$
$1^{12}=1$

2. Attention aux signes !

Ne pas confondre : $(-3)^4=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)=81$
et : $-3^4=-3\times 3\times 3\times 3=-81$

Exercice :
Calculer de même en appliquant la règle des signes :
$(-5)^2$; -1^2 ; $(-1)^2$; -3^3 ; $(-2)^2$; -7^2 ; $(-9)^0$; -9^0

Réponses : 25 ; -1 ; 1 ; -27 ; 4 ; -49 ; 1 ; -1

3. Opérations sur les puissances

It is really hard to believe that **DIVERTISSEMENT**

$0^0+3^0+5^0+6^0+9^0+10^0+12^0+15^0=1^0+2^0+4^0+7^0+8^0+11^0+13^0+14^0$,
$0^1+3^1+5^1+6^1+9^1+10^1+12^1+15^1=1^1+2^1+4^1+7^1+8^1+11^1+13^1+14^1$,
$0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2=1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2$,
$0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3=1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3$.

Propriétés :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n\times p}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les puissances

- **Vidéo** https://youtu.be/FBmVDGvUtJ4
- **Vidéo** https://youtu.be/cY6xdxT7kLM

Exprimer sous la forme d'une seule puissance :

$A = \dfrac{1}{4^2}$ $\quad B = 4^5 \times 4^7$ $\quad C = \dfrac{5^4}{5^6}$ $\quad D = 7^3 \times (7^2)^6$ $\quad E = 6^7 \times 9^7$

Correction

$A = \dfrac{1}{4^2} = 4^{-2}$

$B = 4^5 \times 4^7 = 4^{5+7} = 4^{12}$

$C = \dfrac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2}$

$D = 7^3 \times (7^2)^6 = 7^3 \times 7^{2\times 6} = 7^3 \times 7^{12} = 7^{3+12} = 7^{15}$

$E = 6^7 \times 9^7 = (6 \times 9)^7 = 54^7$

Méthode : Appliquer les formules sur les puissances de 10

- **Vidéo** https://youtu.be/GWz5_veC12U
- **Vidéo** https://youtu.be/EL4dBiBbL-U

a) Écrire sous la forme 10^n ou 10^{-n} :

$A = 10^4 \times 10^7$ $\quad B = \dfrac{10^{-4}}{10^5}$ $\quad C = (10^2)^{-6}$ $\quad D = 10^{-4} \times (10^3)^{-1}$

b) Écrire en notation scientifique :

$A = 4 \times 7 \times 10^{-5} \times 10^{-8}$ $\quad B = \dfrac{7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^8}{56 \times 10^{-9}}$ $\quad C = \dfrac{32 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-5}}$

Correction

a) $A = 10^4 \times 10^7 = 10^{4+7} = 10^{11}$

$B = \dfrac{10^{-4}}{10^5} = 10^{-4-5} = 10^{-9}$

$C = (10^2)^{-6} = 10^{2\times(-6)} = 10^{-12}$

$D = 10^{-4} \times (10^3)^{-1} = 10^{-4} \times 10^{3\times(-1)} = 10^{-4} \times 10^{-3} = 10^{-4-3} = 10^{-7}$

b) $A = 4 \times 7 \times 10^{-5} \times 10^{-8} = 28 \times 10^{-5-8} = 28 \times 10^{-13} = 2{,}8 \times 10^{-12}$

$B = \dfrac{7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^8}{56 \times 10^{-9}} = \dfrac{7 \times 5}{56} \times \dfrac{10^{-4} \times 10^8}{10^{-9}} = 0{,}625 \times \dfrac{10^4}{10^{-9}} = 0{,}625 \times 10^{13} = 6{,}25 \times 10^{12}$

$C = \dfrac{32 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-5}} = \dfrac{0{,}0032 + 0{,}006}{2 \times 10^{-5}} = \dfrac{0{,}0092}{2 \times 10^{-5}} = \dfrac{0{,}0092}{2} \times \dfrac{1}{10^{-5}} = 0{,}0046 \times 10^5 = 4{,}6 \times 10^2$

Partie 3 : Racines carrées

1. Définition

Exemples :

- $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
- $2{,}6^2 = 6{,}76$ donc $\sqrt{6{,}76} = 2{,}6$
- $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$
- $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ s'écrivent avec un nombre infini de décimales, on les appelle des nombres irrationnels.

Racines de carrés parfaits :

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	

Définition :
La **racine carrée** de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a.

Remarque : $\sqrt{-5} = \ ?$
La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5 !
Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.
$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

2. Propriétés sur les racines carrées

Propriétés : a et b sont des nombres positifs.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$ $\qquad (\sqrt{a})^2 = a$ $\qquad \sqrt{a^2} = a$

⚠ De façon générale : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Démonstration au programme : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Vidéo https://youtu.be/gzp16wnchaU

- $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$
- $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ car a et b sont positifs

Donc $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a \times b})^2$ et donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Démonstration au programme : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Vidéo https://youtu.be/fkE5KngvcCA

On a par exemple :
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

Donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$
Et donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les racines carrées
Vidéo https://youtu.be/CrTjK3Qa72s

Écrire le plus simplement possible :
$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$ $\qquad B = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$ $\qquad C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3}$
$D = \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ $\qquad E = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ $\qquad F = (4\sqrt{5})^2$ $\qquad G = \dfrac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

Correction

$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$

$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$

$$D = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$E = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{50}{72}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

$F = (4\sqrt{5})^2 = 4^2 \times (\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$

$$G = \frac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{32\times10}{80}} = \sqrt{4} = 2$$

3) Extraire un carré parfait

Vidéo https://youtu.be/cz27kb_qTy4

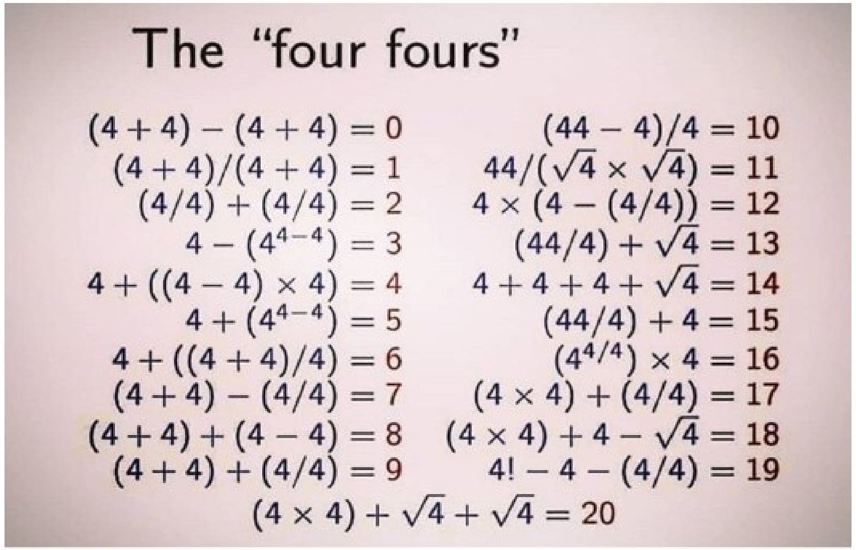
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :
$A = \sqrt{72}$ $\qquad B = \sqrt{45}$ $\qquad C = 3\sqrt{125}$

Correction

$A = \sqrt{72}$
$= \sqrt{36 \times 2}$ ← *On fait « apparaître » dans 72 le carré parfait 36*
$= \sqrt{36} \times \sqrt{2}$ ← *On extrait cette racine en appliquant une formule*
$= 6\sqrt{2}$ ← *On simplifie la racine du carré parfait*

$B = \sqrt{45}$
$= \sqrt{9 \times 5}$
$= \sqrt{9} \times \sqrt{5}$
$= 3\sqrt{5}$

$C = 3\sqrt{125}$
$= 3\sqrt{25 \times 5}$
$= 3\sqrt{25} \times \sqrt{5}$
$= 3 \times 5 \times \sqrt{5}$
$= 15\sqrt{5}$



4) Simplifier les écritures contenant des racines carrées

- **Vidéo** https://youtu.be/8pB5pq2MyDM
- **Vidéo** https://youtu.be/MXJYntzumDo

Exercices :

1) Écrire le plus simplement possible :
$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
$C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$

2) Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible :
$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$
$E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$

Correction

1) On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.
Les différentes familles de racines carrées sont : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$, …

$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
$= 8\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
$= 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

$C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$
$= 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3}$
$= -1 + 4\sqrt{3}$

2) On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des carrés parfaits.

$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ ← *$\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ sont des « $\sqrt{3}$ déguisées »*
$= \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$ ← *Elles sont maintenant « démasquées » !*
$= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ ← *On peut alors réduire l'expression*
$= 6\sqrt{3}$

$E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$
$= \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$
$= 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5}$
$= 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 24\sqrt{5}$
$= 25\sqrt{5}$

5) Racines carrées et développements

Vidéo https://youtu.be/xmtZS0GwV_Y

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (\sqrt{3} - 4)^2$
$B = (3 + \sqrt{5})^2$
$C = (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$
$D = (3 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})$

Correction

On applique les règles classiques de développement d'une expression comme on peut le faire en calcul littéral.
Les racines sont alors « traitées » comme une inconnue.

$$\begin{aligned}A &= \left(\sqrt{3}-4\right)^2 \qquad \leftarrow \textit{On applique la 2}^{e}\textit{ identité remarquable}\\ &= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\times\sqrt{3}\times 4 + 4^2\\ &= 3 - 8\sqrt{3} + 16\\ &= 19 - 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \left(3+\sqrt{5}\right)^2 \qquad \leftarrow \textit{On applique la 1}^{ère}\textit{ identité remarquable}\\ &= (3)^2 + 2\times 3\times\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2\\ &= 9 + 6\sqrt{5} + 5\\ &= 14 + 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) \qquad \leftarrow \textit{On applique la 3}^{e}\textit{ identité remarquable}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\\ &= 2 - 5\\ &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \left(3+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) \qquad \leftarrow \textit{On applique la double distributivité}\\ &= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3}\times\sqrt{2}\\ &= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\end{aligned}$$