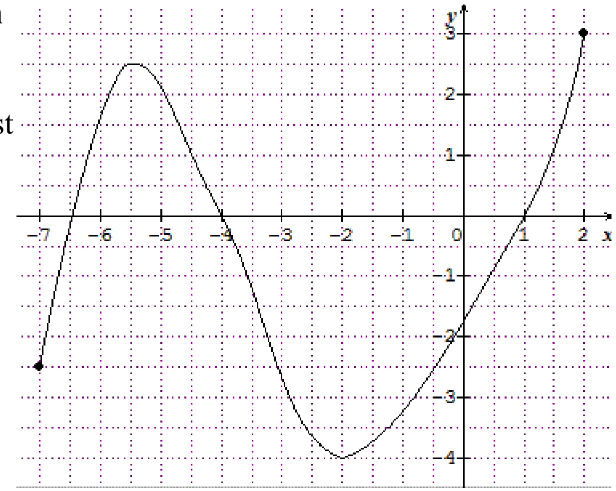
COURS - Les Fonctions Numériques

A) Lectures graphiques

1) Domaine de définition

On donne le graphique ci-contre :
Le domaine de définition de *f* est l'intervalle des valeurs de *x* où il est possible de déterminer *f(x)*



Ici on a donc $D_f=[-7\,;-2]$

Vocabulaire :

- x s'appelle : **antécédent**
- $f(x)$ s'appelle : **image**
- $M(x\,;f(x))$ est un **point** du graphique C_f

2) Tableau de valeurs

On donne la fonction définie par $f(x)=x^2-2x-3$ avec $D_f=[-2\,;4]$

Avec la *fiche Méthode* on obtient le tableau de valeurs :

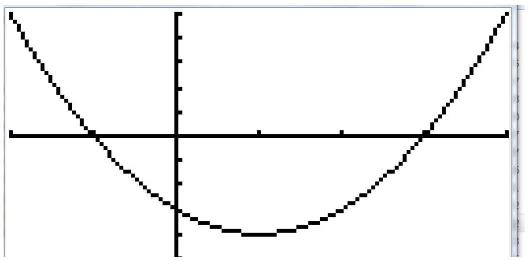
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

Interprétations :

- 2 a pour image -3
- -3 a pour antécédents 0 et 2
- Les racines de f sont -1 et 3
- f admet un minimum en -4 (pour $x=1$)
- f admet un maximum en 5 (pour $x=-2$ et $x=4$)

Définitions :

- x_0 est une **racine** de f si $f(x_0)=0$
- le **minimum** d'une fonction est la plus petite image
- le **maximum** d'une fonction est la plus grande image



3) Tableau de signes

On donne la fonction définie par $f(x)=x^2-2x-3$ avec $D_f=[-2\,;4]$
le tableau de signes de f est donné ci-dessous :

x	-2		-1		2		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Interprétations :

- f est positive sur les intervalles $[-2\,;-1]$ et $[2\,;4]$
- f est négative sur l'intervalle $[-1\,;2]$

4) Tableau de variations

On donne la fonction définie par $f(x)=x^2-2x-3$ avec $D_f=[-2\,;4]$
le tableau de signes de f est donné ci-dessous :

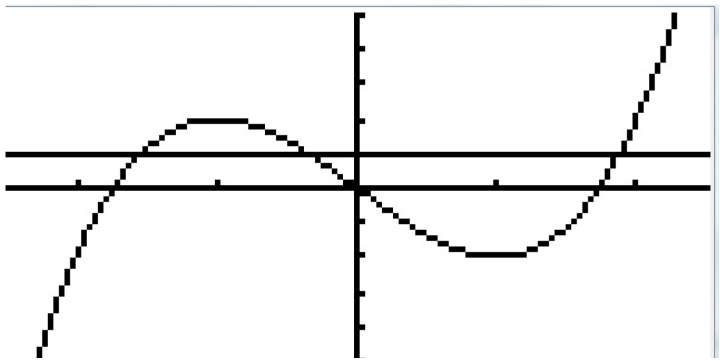
x	-2		1		4
f	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

Interprétations :

- f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;1]$
- f est croissante sur l'intervalle $[1\,;4]$

5) Équations & inéquations

On donne la fonction f définie sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$ par $f(x)=x^3-3x$
on cherche les solutions de l'équation $f(x)=1$



Avec la *fiche Méthode* on obtient les solutions :
$x\simeq-1{,}53$ ou $x\simeq0{,}35$ ou $x\simeq1{,}88$

B) Calculs numériques

1) Calculer une image

On donne la fonction f définie par $f(x)=-x^2+3x+4$ sur $[-2;5]$

On souhaite calculer les images (non entières) par f des valeurs suivantes :

$$-0{,}5;\frac{1}{3};\sqrt{2};-\frac{2}{5};2\sqrt{3};\sqrt{5}+1$$

$$f(-0{,}5)=-(-0{,}5)^2+3\times(-0{,}5)+4=2{,}25$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{3}\right)+4=\frac{44}{9}$$

$$f(\sqrt{2})=-(\sqrt{2})^2+3\times(\sqrt{2})+4=2+3\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{-2}{5}\right)=-\left(\frac{-2}{5}\right)^2+3\times\left(\frac{-2}{5}\right)+4=2{,}64$$

$$f(2\sqrt{3})=-(2\sqrt{3})^2+3\times(2\sqrt{3})+4=-8+6\sqrt{3}$$

$$f(2-\sqrt{5})=-(2-\sqrt{5})^2+3\times(2-\sqrt{5})+4=1+\sqrt{5}$$

2) Calculer un antécédent

On donne la fonction f définie par $f(x)=-x^2+3x+4$ sur $[-2;5]$

On souhaite calculer les antécédents par f des valeurs suivantes :

$4;0;6;5$

$f(x)=4$ donne $-x^2+3x+4=4$ donc $-x^2+3x=0$ donc $(x)(3-x)=0$
donc $x=0$ ou $x=3$

$f(x)=0$ donne $-x^2+3x+4=0$ donc $-x^2+3x-2{,}25+6{,}25=0$
donc $-(x^2-3x+2{,}25)=-6{,}25$ donc $-(x-1{,}5)^2=-6{,}25$
donc $(x-1{,}5)^2=6{,}25$ donc $x-1{,}5=-\sqrt{6{,}25}$ ou $x-1{,}5=\sqrt{6{,}25}$
donc $x-1{,}5=-2{,}5$ ou $x-1{,}5=2{,}5$ donc $x=-1$ ou $x=4$

$f(x)=6$ donne $-x^2+3x+4=6$ donc $-x^2+3x-2=0$
donc $-x^2+3x-2{,}25+0{,}25=0$ donc $-x^2+3x-2{,}25=-0{,}25$
donc $-(x-1{,}5)^2=-0{,}25$ donc $(x-1{,}5)^2=0{,}25$
donc $x-1{,}5=-\sqrt{0{,}25}$ ou $x-1{,}5=\sqrt{0{,}25}$ donc $x=1$ ou $x=2$

$f(x)=5$ donne $-x^2+3x+4=5$ donc $-x^2+3x-1=0$
donc $-x^2+3x-2{,}25+1{,}25=0$
donc $-(x-1{,}5)^2+1{,}25=0$ donc $(x-1{,}5)^2=1{,}25$
donc $x-1{,}5=-\sqrt{1{,}25}$ ou $x-1{,}5=\sqrt{1{,}25}$
donc $x-1{,}5=\frac{-\sqrt{5}}{2}$ ou $x-1{,}5=\frac{\sqrt{5}}{2}$ donc $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

3) Sens de variation

On donne la fonction f définie par $f(x)=-x^2+3x+4$ sur $[-2;5]$
on vérifie que $f(x)=-(x-1{,}5)^2+6{,}25$

Rque : on appelle cette 2eme écriture : la **forme canonique** de f

Définitions :

- f est **croissante** si $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$
- f est **décroissante** si $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

Conjectures :

- f est croissante sur $[-2;1{,}5]$
- f est décroissante sur $[1{,}5;5]$

Preuves :

soient a et b 2 réels tels que $a<b$ dans l'intervalle $[-2;1{,}5]$
donc $a-1{,}5<b-1{,}5<0$ donc $(a-1{,}5)^2>(b-1{,}5)^2$
donc $-(a-1{,}5)^2<-(b-1{,}5)^2$ donc $-(a-1{,}5)^2+6{,}25<-(b-1{,}5)^2+6{,}25$
donc $f(a)<f(b)$ donc f est croissante sur $[-2;1{,}5]$

soient a et b 2 réels tels que $a<b$ dans l'intervalle $[1{,}5;5]$
donc $0<a-1{,}5<b-1{,}5$ donc $(a-1{,}5)^2<(b-1{,}5)^2$
donc $-(a-1{,}5)^2>-(b-1{,}5)^2$ donc $-(a-1{,}5)^2+6{,}25>-(b-1{,}5)^2+6{,}25$
donc $f(a)>f(b)$ donc f est décroissante sur $[1{,}5;5]$

On obtient le tableau de variations de f :

x	-2		$1{,}5$		5
f			$6{,}25$		
	-6	↗		↘	-6

4) Extrema de fonctions

On donne la fonction f définie par $f(x)=-x^2+3x+4$ sur $[-2\,;5]$
on vérifie que $f(x)=-(x-1{,}5)^2+6{,}25$

Définitions :

- f admet un **minimum** en m si pour tout $x\in D_f$: $f(x)\geqslant m$
- f admet un **maximum** en M si pour tout $x\in D_f$: $f(x)\leqslant M$

on sait que pour tout $x\in[-2\,;5]$: $(x-1{,}5)^2\geqslant 0$
donc $-(x-1{,}5)^2\leqslant 0$ donc $-(x-1{,}5)^2+6{,}25\leqslant 6{,}25$
donc f admet un maximum en 6,25 (atteint pour $x=1{,}5$)

5) Équations & Inéquations

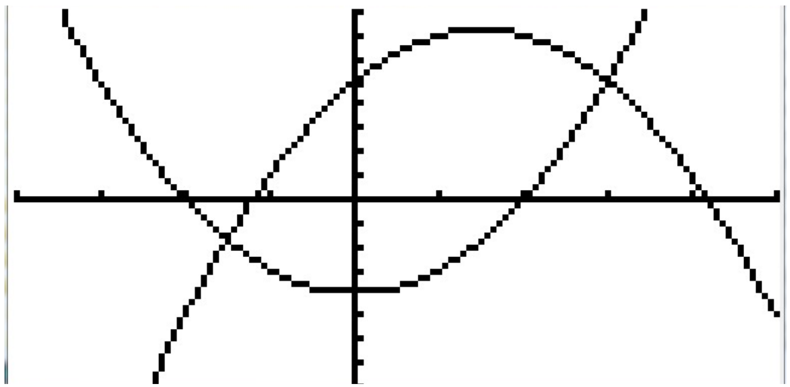
Soit $f(x)=-x^2+3x+5$ et $g(x)=x^2-4$ avec $x\in[-4\,;5]$

on cherche à résoudre :

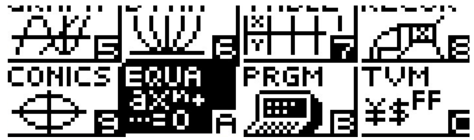
- l'équation $f(x)=g(x)$
- l'inéquation $f(x)<g(x)$
- l'inéquation $f(x)>g(x)$
- l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$
- l'inéquation $f(x)\geqslant g(x)$

<u>Conjectures</u> :

- l'équation $f(x)=g(x)$ donne $S=\{-1{,}5\,;3\}$
- l'inéquation $f(x)<g(x)$ donne $S=[-4\,;-1{,}5[\cup]3\,;5]$
- l'inéquation $f(x)>g(x)$ donne $S=]-1{,}5\,;3[$
- l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$ donne $S=[-4\,;-1{,}5]\cup[3\,;5]$
- l'inéquation $f(x)\geqslant g(x)$ donne $S=[-1{,}5\,;3]$

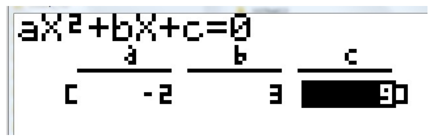


<u>Preuves</u> :
équation $f(x)=g(x)$ donne $-x^2+3x+5=x^2-4$
donc $-x^2+3x+5-x^2+4=0$ donc $-2x^2+3x+9=0$
on utilise alors le Menu "EQUA" de la calculatrice



on sélectionne le champ "POLYNOMIAL" (par F2) puis "Degree 2" (par F2)

Compléter les champs des valeurs de $a=$¿ , $b=$¿ , $c=$¿



Enfin sélectionner le mode "SOLVE" (par F1) -> on obtient les solutions

Pour chaque inéquation proposée on utilise les valeurs trouvées
($x=3, x=-1{,}5$)

Puis on observe le graphique des graphiques de C_f et C_g pour conclure

- avec $f(x)<g(x)$ les solutions sont les valeurs de x où C_f si situe en-dessous de C_g
- avec $f(x)>g(x)$ les solutions sont les valeurs de x où C_f si situe au-dessus de C_g