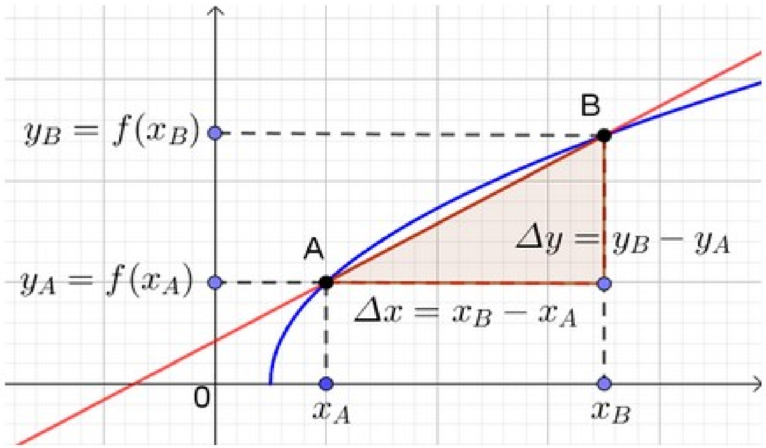
COURS - Les Fonctions de Références

A) Sens de variation d'une fonction

1) Taux d'accroissement

Définition : On appelle "Taux d'accroissement" d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ le nombre réel : $\tau=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

interprétation graphique :



On déduit que le **taux d'accroissement** de f sur $[a;b]$ correspond au **coefficient-directeur** du segment $[AB]$

Rque : on pourra aussi utiliser la formule $\tau=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

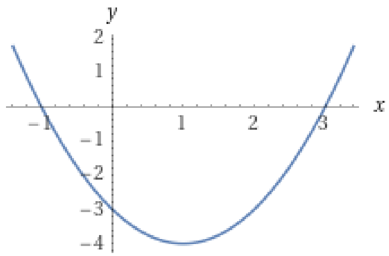
2) Sens de variation

Théorème fondamental : Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$

- Si $\tau>0$ alors f est croissante sur $[a;b]$
- Si $\tau<0$ alors f est décroissante sur $[a;b]$
- Si $\tau=0$ alors f est constante sur $[a;b]$

exemple :
On donne la fonction définie par
$f(x)=x^2-2x-3$ avec $D_f=[-2;4]$

on cherche le taux d'accroissement de f entre 2 et 4 :

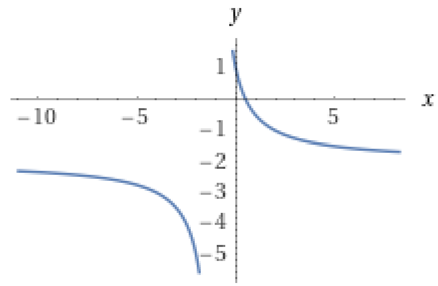


$$\tau=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5-(-3)}{2}=2>0$$

donc f est croissante sur l'intervalle $[2;4]$

Il est fondamental de *conjecturer* au préalable le sens de variation !
En effet sur [0;2] on obtient $\tau=0$ or f n'est pas constane sur [2;4] !

exemple : On donne la fonction définie par $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ avec $D_f=[0;4]$; on cherche le taux d'accroissement de f entre 1 et 3 :



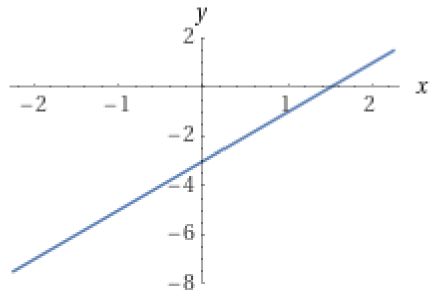
$$\tau=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{-1{,}25-(-0{,}5)}{2}=-0{,}375<0$$

donc f est décroissante sur $[1;3]$

B) Les fonctions de références

1) Les fonctions affines

exemple : On donne la fonction définie par $f(x)=2x-3$ avec $D_f=[-4;4]$
on conjecture que f est croissante sur $[-4;4]$



calcul du taux d'accroissement :

$$\tau=\frac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)}=\frac{8-(-11)}{8}=2{,}375>0$$

donc f est croissante sur $[-4;4]$

Théorème : Soit une fonction **affine** f définie sur un intervalle $[a;b]$ avec $f(x)=mx+p$ alors $\tau=m$

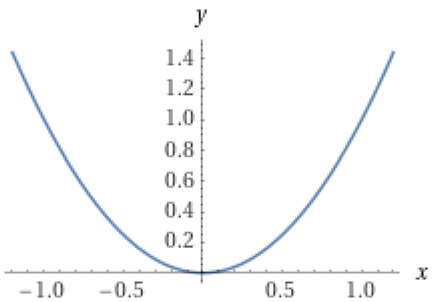
- Si $m>0$ alors f est croissante sur $[a;b]$
- Si $m<0$ alors f est décroissante sur $[a;b]$
- Si $m=0$ alors f est constante sur $[a;b]$

exercice : On donne la fonction $f(x)=-3x+2$ avec $D_f=[-4;4]$
Montrer que f est décroissante sur $[-4;4]$

exercice : On donne la fonction $g(x)=2{,}5x$ avec $D_f=[-4;4]$
Montrer que g est croissante sur $[-4;4]$

2) La fonction "carré"

exemple : On donne la fonction définie par $f(x)=x^2$ avec $D_f=[-4;4]$



on conjecture que f est décroissante sur $[-4;0]$ et croissante sur $[0;4]$

calcul du taux d'accroissement sur $[-4;0]$:

$$\tau=\frac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)}=\frac{0-16}{8}=-2<0$$

donc f est décroissante sur $[-4;0]$

de même on obtient sur $[0;4]$: $\tau=2>0$ donc f est croissante sur $[0;4]$

Théorème : Soit la fonction **carré** f définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(x)=x^2$

- f est décroissante sur $]-\infty;0]$
- f est croissante sur $[0;+\infty[$

f admet un minimum global en 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve : on effectue les preuves sur $]-\infty;0]$ puis sur $[0;+\infty[$

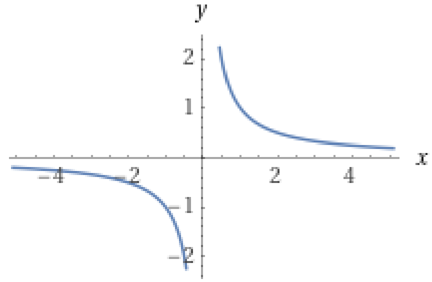
- sur $]-\infty;0]$: soit $a<b<0$ avec $x\in[a;b]$
  $$\tau=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=a+b<0$$
  donc f est décroissante sur $]-\infty;0]$

- sur $[0;+\infty[$: soit $0<a<b$ avec $x\in[a;b]$
  $$\tau=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=a+b>0$$
  donc f est croissante sur $[0;+\infty[$

Conséquence : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geqslant 0$
donc f admet un minimum global en 0

3) La fonction "inverse"

exemple : On donne la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ avec $D_f=[-4;4]\setminus\{0\}$



on conjecture que f est décroissante sur $[-4;0[$ et décroissante sur $]0;4]$

calcul du taux d'accroissement sur $[-4;-1]$:

$$\tau=\frac{f(-4)-f(-1)}{-4-(-1)}=\frac{-0{,}25-(-1)}{-3}=-0{,}25<0$$

donc f est décroissante sur $[-4;-1]$

calcul du taux d'accroissement sur $[1;4]$:

$$\tau=\frac{f(4)-f(1)}{4-(1)}=\frac{0{,}25-(1)}{3}=-0{,}25<0$$ donc f est décroissante sur $[1;4]$

Théorème : Soit la fonction **inverse** f définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(x)=\frac{1}{x}$

- f est décroissante sur $]-\infty;0[$
- f est décroissante sur $]0;+\infty[$

C_f est symétrique par rapport à 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Preuve : on effectue les preuves sur $]-\infty;0[$ puis sur $]0;+\infty[$

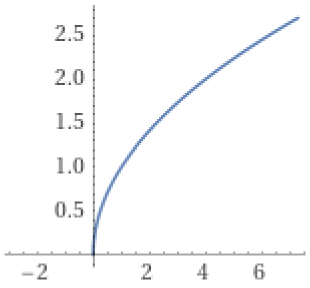
- sur $]-\infty;0[$: soit $a<b<0$ avec $x\in[a;b]$
  $$\tau=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1/b-1/a}{b-a}=\frac{a-b}{(ab)(b-a)}=\frac{-1}{ab}<0$$
  donc f est décroissante sur $]-\infty;0[$

- sur $]0;+\infty[$: soit $0<a<b$ avec $x\in[a;b]$
  $$\tau=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1/b-1/a}{b-a}=\frac{a-b}{(ab)(b-a)}=\frac{-1}{ab}<0$$
  donc f est décroissante sur $]0;+\infty[$

Conséquence : pour tout $x\neq 0$: $f(-x)=-f(x)$; on dit que *f* est "impaire"

4) La fonction "racine"

exemple : On donne la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$ avec $D_f=[0;4]$



on conjecture que f est croissante sur $]0;4]$

calcul du taux d'accroissement sur $]0;4]$:

$$\tau=\frac{f(4)-f(0)}{4-(0)}=\frac{2-(0)}{4}=0{,}5>0$$

donc f est décroissante sur $]0;4]$

Théorème : Soit la fonction **racine** f définie sur $[0;+\infty[$ avec $f(x)=\sqrt{x}$

- f est croissante sur $[0;+\infty[$

$\boxed{f \text{ admet un minimum global en } 0}$

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

Preuve : on effectue les preuves sur $]0;+\infty[$:

- soit $0<a<b$ avec $x\in[a;b]$

$$\tau=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(b-a)}$$

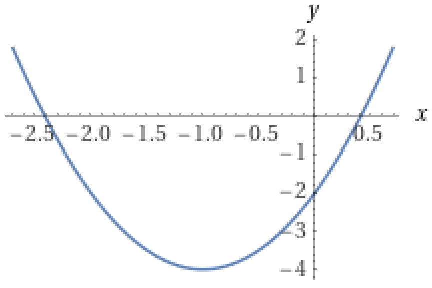
$$=\frac{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(b-a)}=\frac{b-a}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(b-a)}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}>0$$

donc f est croissante sur $]0;+\infty[$

C) Les fonctions paraboliques

1) Les formes canoniques

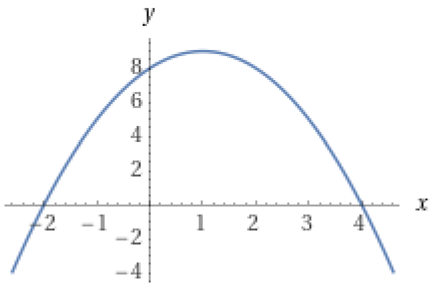
exemple 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2(x+1)^2-4$



a) Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

b) En utilisant la fonction de référence $g(x)=x^2$ justifier les variations de f

exemple 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-(x-1)^2+9$



a) Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

b) En utilisant la fonction de référence $g(x)=x^2$ justifier les variations de f

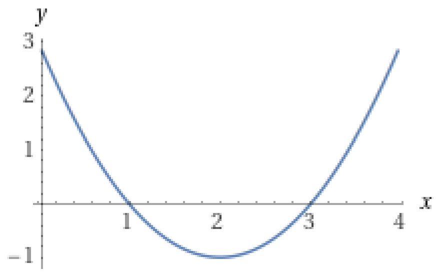
Théorème :

Soit la fonction parabolique : $f(x)=a(x+b)^2+c$

- si $a>0$ alors f est décroissante sur $]-\infty;-b]$ et croissante sur $[-b;+\infty[$; ainsi f admet un minimum global au point $A(-b;c)$
- si $a<0$ alors f est croissante sur $]-\infty;-b]$ et décroissante sur $[-b;+\infty[$; ainsi f admet un maximum global au point $A(-b;c)$

2) Les formes développées

exemple 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$

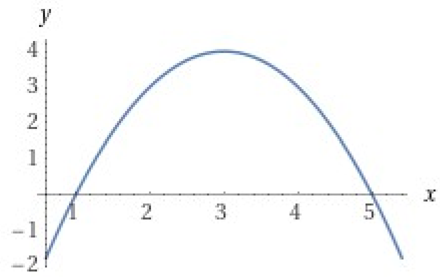


a) Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

b) Démontrer que $f(x)=(x-2)^2-1$

c) En utilisant la fonction de référence $g(x)=x^2$ justifier les variations de f

exemple 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+6x-5$



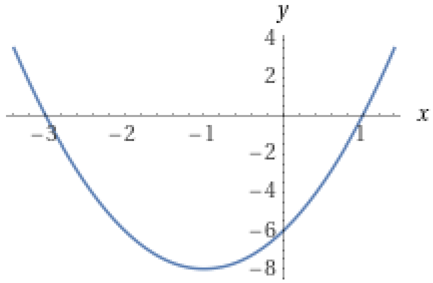
a) Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

b) Démontrer que $f(x)=-(x+3)^2+4$

c) En utilisant la fonction de référence $g(x)=x^2$ justifier les variations de f

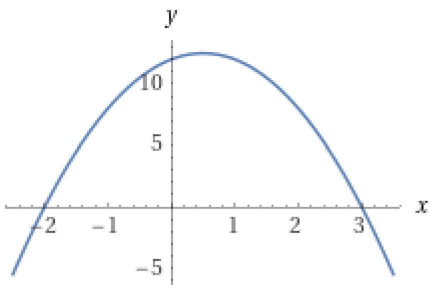
3) Les formes factorisées

exemple 1 **:** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2(x-1)(x+3)$



a) Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
b) Démontrer que $f(x)=2x^2+4x-6$
c) Démontrer que $f(x)=2(x+1)^2-8$
d) En utilisant la fonction de référence $g(x)=x^2$ justifier les variations de f

exemple 2 **:** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x+2)(x-3)$

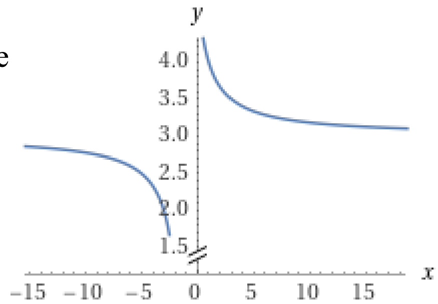


a) Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
b) Démontrer que $f(x)=-2x^2+2x+12$
c) Démontrer que $f(x)=-2(x-0{,}5)^2+12{,}5$
d) En utilisant la fonction de référence $g(x)=x^2$ justifier les variations de f

D) Les fonctions hyperboliques

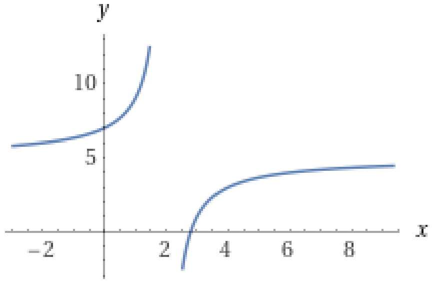
1) Les formes canoniques

exemple 1 **:** Soit la fonction f définie par $f(x)=3+\dfrac{2}{x+1}$



a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f
b) Conjecturer le tableau de variations de f sur D_f
c) En utilisant la fonction de référence $g(x)=\dfrac{1}{x}$ justifier les variations de f

exemple 2 **:** Soit la fonction f définie par $f(x)=5-\dfrac{4}{x-2}$



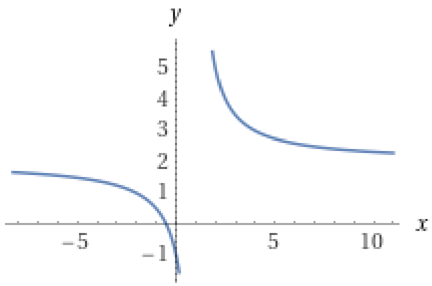
a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f
b) Conjecturer le tableau de variations de f sur D_f
c) En utilisant la fonction de référence $g(x)=\dfrac{1}{x}$ justifier les variations de f

Théorème : Soit la fonction parabolique : $f(x)=a+\dfrac{b}{x+c}$

- le domaine de définition de f est $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-c\}$
- si $b>0$ alors f est décroissante sur $]-\infty;-c[$ et décroissante sur $]-c;+\infty[$; ainsi C_f admet un centre de symétrie au point $A(a;-c)$
- si $b<0$ alors f est croissante sur $]-\infty;-c[$ et croissante sur $]-c;+\infty[$; ainsi C_f admet un centre de symétrie au point $A(a;-c)$

2) Les formes homographiques

exemple 1 **:** Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$



a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f
b) Conjecturer le tableau de variations de f sur D_f
c) Démontrer que $f(x)=2-\dfrac{3}{x-1}$
d) En utilisant la fonction de référence $g(x)=\dfrac{1}{x}$ justifier les variations de f

exemple 2 **:** Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{-3x+2}{x+2}$

a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f
b) Conjecturer le tableau de variations de f sur D_f
c) Démontrer que $f(x)=-3+\dfrac{8}{x+2}$
d) En utilisant la fonction de référence $g(x)=\dfrac{1}{x}$ justifier les variations de f