

Les Pourcentages

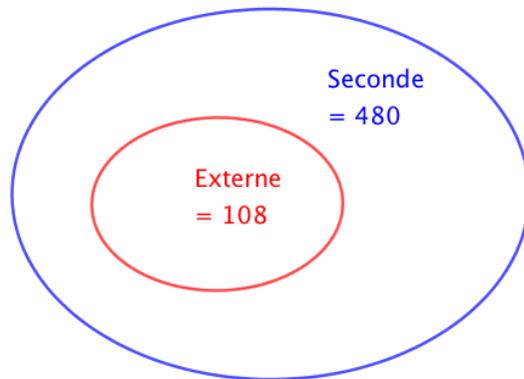
▶ **Tout le cours en vidéo :** https://youtu.be/Y_gDKPidUQ0

I. Proportion et pourcentage

1) Proportion d'une sous-population

Exemple :

Sur les 480 élèves inscrits en classe de 2^{nde}, 108 d'entre eux sont externes.



La **population totale** des élèves de 2^{nde}, notée N , est égale à 480. C'est la population de référence.

La **sous-population** des élèves externes, notée n , est égale à 108.

La **proportion** d'élèves externes parmi tous les élèves de seconde, notée p , est :

$$p = \frac{n}{N} = \frac{108}{480} = \frac{9}{40} = 0,225.$$

Cette proportion peut s'exprimer en **pourcentage** : $p = 22,5\%$.

2) Pourcentage d'un nombre

Exemple :

Parmi les 480 élèves de seconde, 15 % ont choisi l'option grec ou latin. 15 % de 480 ont choisi l'option grec ou latin, soit :

$$15\% \times 480 = \frac{15}{100} \times 480 = 72 \text{ élèves.}$$

Méthode : Associer effectif, proportion et pourcentage

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/r8S46rk9x9k>

Exemple :

Une société de 75 employés compte 12 % de cadres et le reste d'ouvriers.

35 employés de cette société sont des femmes et 5 d'entre elles sont cadres.

- Calculer l'effectif des cadres.
- Calculer la proportion de femmes dans cette société.
- Calculer la proportion, en %, de cadres parmi les femmes. Les femmes cadres sont-elles sous ou surreprésentées dans cette société ?

Solutions :

a) 12 % de 75 = $\frac{12}{100} \times 75 = 9$.

Cette société compte 9 cadres.

b) $n = 35$ femmes et $N = 75$ employés

La proportion de femmes est donc égale à $p = \frac{35}{75} = \frac{7}{15} \approx 0,47$.

c) $n = 5$ femmes cadres et $N = 35$ femmes. La population de référence n'est plus la même.

La proportion de cadres parmi les femmes est égale à $p = \frac{5}{35} =$

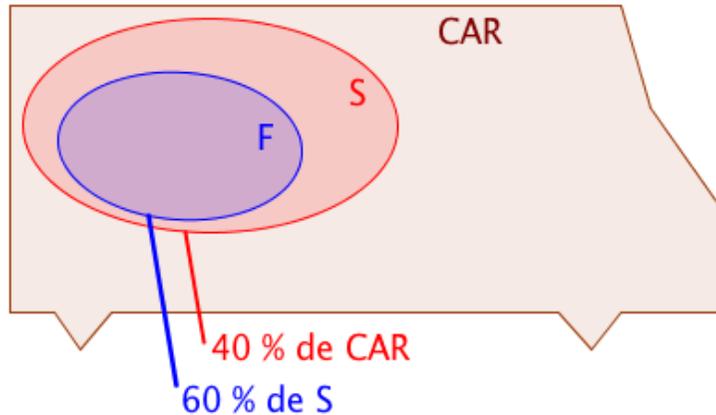
$$\frac{1}{7} \approx 0,14 = 14\%.$$

14 % > 12 % donc les femmes cadres sont surreprésentées dans cette société.

3) Proportions échelonnées

Exemple :

Dans un car, il y a 40 % de scolaires. Et parmi les scolaires, 60 % sont des filles.



L'ensemble F est inclus dans l'ensemble S et on a : $p_F = 60\%$ de S.
L'ensemble S est inclus dans l'ensemble CAR et on a : $p_S = 40\%$ de CAR.

La proportion de scolaires filles dans le CAR est donc égale à :
 $60\% \text{ de } 40\% = 60\% \times 40\% = 0,6 \times 0,4 = 0,24 = 24\%$.

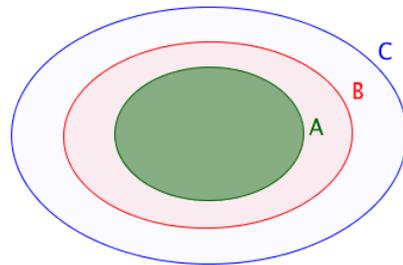
Propriété :

$A \subset B$ et $B \subset C$.

p_1 est la proportion de A dans B.

p_2 est la proportion de B dans C.

Alors $p = p_1 \times p_2$ est la proportion de A dans C.



Méthode : Calculer des pourcentages de pourcentages

 Vidéo <https://youtu.be/nPPRsOW2veU>

Exemple :

Sur 67 millions d'habitants en France, 66 % de la population est en âge de travailler (15-64 ans).

La population active représente 70 % de la population en âge de travailler.

a) Calculer la proportion de population active par rapport à la population totale.

b) Combien de français compte la population active ?

Solutions :

a) F est la population française.

T est la population en âge de travailler.

A est la population active.

La proportion de A dans T est 70 %.

La proportion de T dans F est 66 %.

La proportion de A dans F est donc égale à :

$70\% \times 66\% = 0,7 \times 0,66 = 0,462 = 46,2\%$.

46,2 % des français sont actifs.

b) $46,2\% \text{ de } 67 = 0,462 \times 67 = 30,954$.

La France compte environ 31 millions d'actifs.

II. Évolution exprimée en pourcentage

1) Calculer une évolution

Propriétés et définition :

- Augmenter une valeur de $t\%$ revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.

- Diminuer une valeur de $t\%$ revient à la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

- $1 + \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{t}{100}$ sont appelés les **coefficients multiplicateurs**.

Démonstration pour l'augmentation :

Si on augmente une valeur V_0 de t % alors sa valeur V_1 après augmentation est égale à :

$$V_1 = V_0 + V_0 \times \frac{t}{100} = V_0 \left(1 + \frac{t}{100} \right)$$

Exemples :

▶ Vidéo <https://youtu.be/UVXFEDUnSjl>

▶ Vidéo <https://youtu.be/-5QmcMuzy5l>

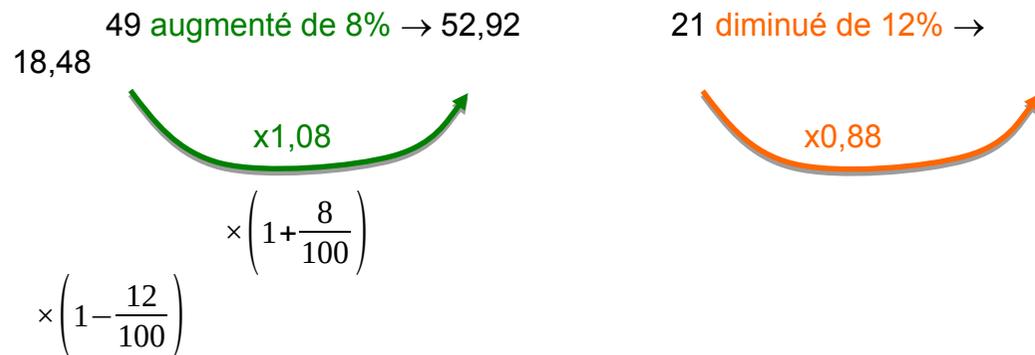
- Le prix d'un survêtement est de 49€. Il augmente de 8%.

Son nouveau prix est égal à $\left(1 + \frac{8}{100} \right) \times 49 = 1,08 \times 49 = 52,25$ € .

- Le prix d'un polo est de 21€. Il diminue de 12%.

Son nouveau prix est égal à $\left(1 - \frac{12}{100} \right) \times 21 = 0,88 \times 21 = 18,48$ € .

Schéma :



2) Calculer un taux d'évolution

Définition : On considère une valeur V_0 qui subit une évolution pour arriver à une valeur V_1 .

Le taux d'évolution est égal à : $t = i \quad \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

En pourcentage, le taux d'évolution est égal à : $t(\%) = 100 \times \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

Remarque :

Si $t > 0$, l'évolution est une augmentation.

Si $t < 0$, l'évolution est une diminution.

Exemple :

▶ Vidéo <https://youtu.be/Y48-iK7Cp20>

La population d'un village est passé de 8500 à 10400 entre 2008 et 2012.

Calculer le taux d'évolution de la population en %.

$$t = i \quad \frac{10400 - 8500}{8500} \approx 0,224 \quad \text{soit } 22,4\%$$

3) Évolutions successives

Remarque préliminaire :

Une hausse de t % suivie d'une baisse de t % ne se compensent pas. Par exemple, si une grandeur N subit une augmentation de 10% suivie d'une diminution de 10% alors elle subit une diminution de 1%.

En effet, $N \times \left(1 + \frac{10}{100} \right) \times \left(1 - \frac{10}{100} \right)$
soit $N \times 1,1 \times 0,9 = N \times 0,99 = N \times \left(1 - \frac{1}{100} \right)$.

Propriété : Si une grandeur subit des évolutions successives alors le coefficient multiplicateur global est égal aux produits des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Méthode : Déterminer un taux d'évolution global

▶ Vidéo <https://youtu.be/qOg2eXd8Hv0>

Exemple :

En 2010, la boulangerie-pâtisserie *Aux délices* a augmenté ses ventes de 10%. En 2011, elle a diminué ses ventes de 5%.

Calculer le taux d'évolution des ventes sur les deux années.

Solutions :

Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation en 2010 est égal à : $1 + \frac{10}{100}$.

Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution en 2011 est égal à : $1 - \frac{5}{100}$.

Le coefficient multiplicateur sur les deux années est égal à :

$$\left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 1,1 \times 0,95 = 1,045 = 1 + \frac{4,5}{100} .$$

Le taux d'évolution des ventes sur les deux années est donc égal à 4,5 %.

4) Évolution réciproque

Définition : On considère le taux t d'évolution de la valeur V_0 à la valeur V_1 .

On appelle **évolution réciproque** le taux t' d'évolution de la valeur V_1 à la valeur V_0 .

Propriété : On considère le taux t d'évolution de la valeur V_0 à la valeur V_1 .

L'évolution réciproque possède un coefficient multiplicateur inverse de l'évolution directe.

Démonstration :

Si on augmente une valeur V_0 de t % alors sa valeur V_1 après augmentation est égale à :

$$V_1 = V_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) \text{ et donc : } V_0 = V_1 \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} .$$

L'évolution réciproque a donc pour coefficient multiplicateur

$$\frac{1}{1 + \frac{t}{100}} = \frac{100}{100 + t} .$$

Méthode : Déterminer un taux d'évolution réciproque

 Vidéo <https://youtu.be/NiCxHYkpNiM>

Exercices :

1) Un magasin a des ventes en diminution de 8% sur l'année 2011. Quel devrait être le pourcentage d'évolution sur l'année 2012 pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale ?

2) La population d'un village a augmenté de 3% sur une année puis retrouve sa valeur initiale l'année suivante.

Quel est le pourcentage de baisse sur la 2^e année ?

Solutions :

1) Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution de 8 % est égal à :

$$1 - \frac{8}{100} = 0,92 .$$

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à : $\frac{1}{0,92}$

$$\approx 1,087 = 1 + \frac{8,7}{100} .$$

Pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale, il faudrait qu'elles augmentent d'environ 8,7 % sur l'année 2012.

2) Le coefficient multiplicateur est égal à $1 + \frac{3}{100} = 1,03$.

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à :

$$\frac{1}{1,03} \approx 0,971 = 1 - 0,029 = 1 - \frac{2,9}{100} .$$

Sur la 2^e année, la population diminue d'environ 2,9%.