L'outil vectoriel et géométrie analytique

Table des matières

1 Définition et théorème

1.1 Définition

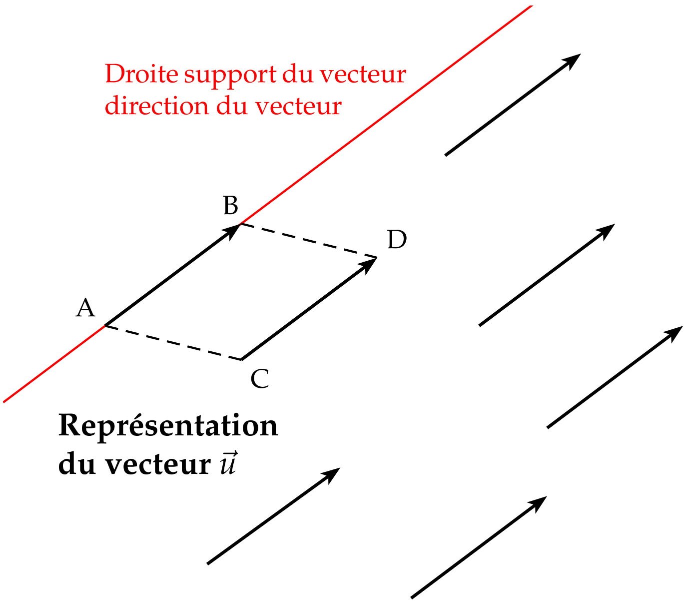
Définition 1 : Un vecteur $\vec{u}$ est un objet mathématique qui se définit par :

- Une direction (pente d'une droite, mais pas une orientation)
- Un sens (orientation : la flèche)
- Une norme : longueur du vecteur $\vec{u}$ notée : $||\vec{u}||$

Remarque : :

- Il faut faire la différence entre la direction et le sens du vecteur car dans le langage courant les deux mots sont synonyme.

- Un vecteur n'a pas de point d'application. On peut donc le placer où l'on veut dans le plan euclidien. En cela il se différencie de la force en physique qui elle a un point d'application. Cependant, il y a bien un rapport très étroit entre la symbolisation d'une force en physique et le vecteur en mathématique.



- Ces « segments munis d'une flèche » représentent le même vecteur $\vec{u}$. On dit que le vecteur $\vec{u}$ est la classe d'équivalence de toutes ces représentations .

- Pour fixer un représentant particulier du vecteur $\vec{u}$, on peut prendre deux points A et B du plan. On note alors ce représentant : $\overrightarrow{AB}$.

- Par abus de langage, on confond le représentant $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\vec{u}$. On a alors : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On peut donc noter un vecteur avec une seule lettre (minuscule) ou avec deux lettres (majuscule car point).

⚠ La flèche sur les points A et B est indispensable car, sans flèche, il s'agit de la distance entre les points A et B, norme du vecteur. $||\overrightarrow{AB}|| = AB$

1.2 Égalité entre deux vecteurs

Théorème 1 : Deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont égaux, si, et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ABDC est un parallélogramme}$$

Démonstration : Un vecteur contient deux informations : une longueur et une direction. Si deux vecteurs sont égaux, alors le quadrilatère ABDC possède deux côtés de même longueur et parallèle, ce qui est la définition d'un parallélogramme.

Remarque : On peut donc associer un parallélogramme à l'égalité de deux vecteurs, ce qui simplifie la démonstration pour prouver qu'un quadrilatère est en parallélogramme.

2 Addition de deux vecteurs

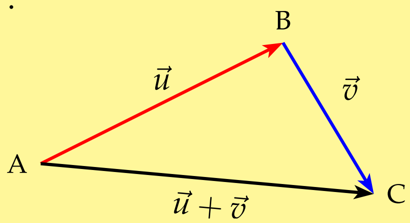
Note : Le but avec un nouvel outil mathématique est de pouvoir manier facilement celui-ci. D'où l'idée de créer des opérations avec les vecteurs. L'addition de deux vecteurs reprend l'idée en physique de la résultante de deux forces de direction différentes. Cette opération est connue sous le nom de « relation de Chasles » (mathématicien du XIX^{e} siècle).

2.1 La relation de Chasles

Propriété 1 : Relation de Chasles

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ dont les représentants sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, on définit l'addition des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ par la relation :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{d'où} \quad \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$



⚠ Cette opération est toujours possible, car l'on peut toujours déplacer le deuxième vecteur $\vec{v}$ pour qu'il commence à la fin du premier $\vec{u}$.

Cette addition de deux vecteurs ne s'applique pas à la norme, en effet :

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \neq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \quad \text{mais} \quad ||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

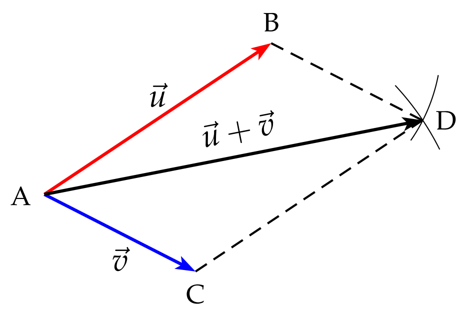
Remarque : Cette opération est très efficace en géométrie, car l'on peut décomposer un vecteur quelconque en deux vecteurs plus intéressant. Par exemple, on peut écrire quelque soit les points E, F et G :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}$$

La seule contrainte est donc de faire commencer le deuxième vecteur à la fin du premier.

2.2 Somme de deux vecteurs de même origine

Cette configuration se produit lorsqu'on cherche à trouver la résultante de deux forces. L'idée pour additionner deux vecteurs de même origine est la configuration du parallèlogramme. On a :



Démonstration : Si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, on a donc :

$$\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

2.3 Propriétés de l'addition de deux vecteurs

Propriété 2 : Propriétés de l'addition de deux vecteurs.

On retrouve les mêmes propriétés dans l'addition de deux vecteurs que dans l'addition de deux nombres.

1) L'addition de deux vecteurs est commutative : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

2) L'addition de trois vecteurs est associative :

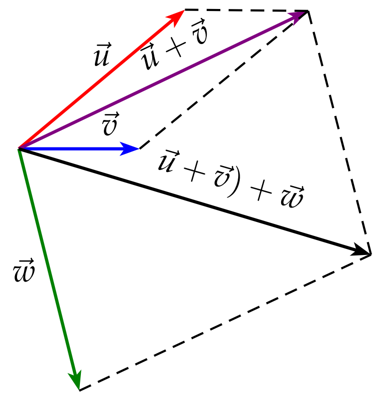
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$

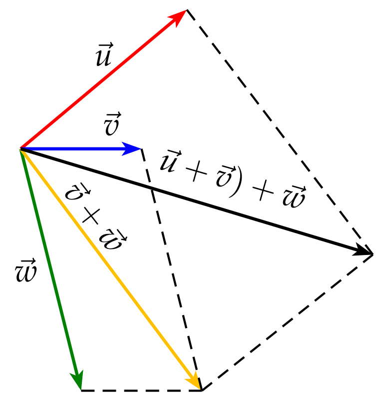
3) L'addition de deux vecteurs possède un élément neutre : $\overrightarrow{0}$

4) Tout vecteur $\vec{u}$ possède un opposé, noté $-\vec{u}$

Remarque :

- La première propriété permet de changer l'ordre dans lequel on effectue l'addition.
- La deuxième propriété signifie que lorsque l'on cherche à additionner deux vecteurs, on peut d'abord additionner les deux premiers, puis additionner ce résultat au troisième ou additionner les deux derniers puis additionner ce résultat au premier. Voici un exemple de cette propriété :





- Le vecteur nul vient du fait que si l'on applique la relation de Chasles à :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$$
On décide d'appeler un vecteur de longueur nulle, le vecteur nul, noté : $\vec{0}$.
- On a alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$, on décide de noter : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$
Donc quand on inverse les lettres d'un vecteur on change de signe.

2.4 Exemples d'application

- Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles.
  a) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$
  b) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$
  c) $\vec{w}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

a) On applique la relation de Chasles deux fois

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AA}=\vec{0}\end{aligned}$$

b) On remplace les signes "$-$" par des signe "$+$" en inversant les lettres des vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

c) Même procédé, puis on regroupe les vecteurs identiques

$$\begin{aligned}\vec{w}&=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}\\&=2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

- Démontrer que pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

$\Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow$

On part du terme de gauche pour arriver au terme de droite.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

- ABCD est un parallélogramme et M un point quelconque. Démontrer que :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$$

$\Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow$

Si ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

On part du terme de gauche, pour arriver au terme de droite :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM}\\ &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \qquad \text{or} \qquad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BB}\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Note : Le terme « scalaire » est employé pour désigner un nombre réel par opposition au mot vecteur.

3.1 Définition

Définition 2 : Soit un vecteur $\vec{u}$ et un réel k.

On définit le produit $k\,\vec{u}$ du scalaire k par le vecteur $\vec{u}$ par :

- Si $k > 0$ $\quad k\,\vec{u}$ a la même direction et même sens que $\vec{u}$ et sa longueur est multiplier par k. On a alors :

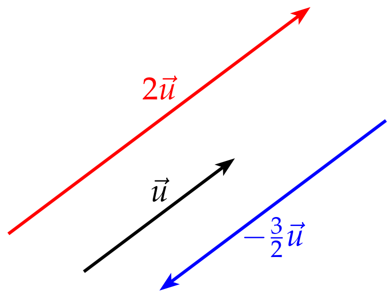
$$||k\,\vec{u}|| = k\,||\vec{u}||$$

- Si $k < 0$ $\quad k\,\vec{u}$ a la même direction et un sens contraire à $\vec{u}$ et sa longueur est multiplier par $-k$. On a alors :

$$||k\,\vec{u}|| = -k\,||\vec{u}||$$

- Si $k = 0$ on a alors : $0\,\vec{u} = \overrightarrow{0}$

On a ainsi les vecteurs suivants :



⚠ Quand k est positif, il ne joue que sur la longueur du vecteur. Quand k est négatif, il joue sur la longueur et sur le sens.

3.2 Exercices d'application

a) Exercice 1

Les point A, B C, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous. Dans chaque cas, trouver le nombre réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$

1) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont de sens contraire, donc $k < 0$.

$$k = -\frac{AB}{AE} = -\frac{6}{2} = -3 \qquad \vec{v} = -3\vec{u}$$

2) $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont de même sens, donc $k > 0$.

$$k = \frac{AD}{AE} = \frac{5}{2} \qquad \vec{v} = \frac{5}{2}\vec{u}$$

3) $\vec{v} = \overrightarrow{EC}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens, donc $k > 0$.

$$k = \frac{EC}{AB} = \frac{6}{6} = 1 \qquad \vec{v} = \vec{u}$$

4) $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire, donc $k < 0$

$$k = -\frac{CD}{AB} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \qquad \vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$$

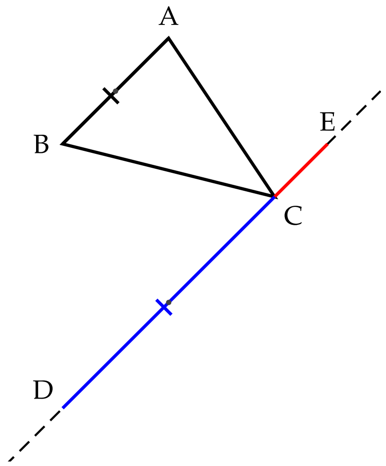
b) Exercice 2

ABC est un triangle.

1) Placer les points D et E tels que : $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2) Trouver le nombre k tel que : $\overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{AB}$

On a la figure suivante :



Comme les deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ s'expriment à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, on trace la droite parallèle à (AB) passant par C et on reporte les distances.

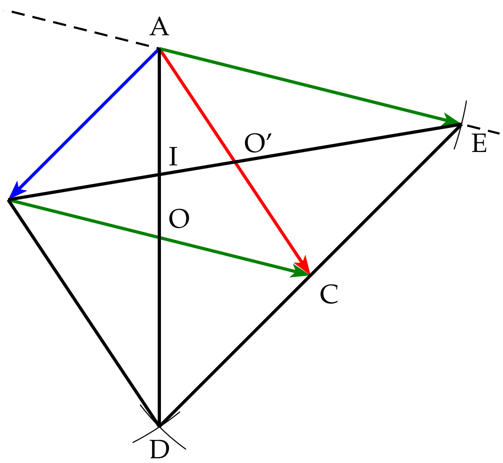
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \quad \text{relation de Chasles}\\ &= -\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}\\ &= -2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

c) Exercice 3

ABC est un triangle.

1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   Prouver que [AD] et [BC] ont même milieu.
2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
   Prouver que C est le milieu de [ED].
3) Les droites (AD) et (BE) se coupent en I. Que représente I pour le triangle ABC ?
   Prouver que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.

1) On a figure suivante :



Pour déterminer le point D, comme $\overrightarrow{AD}$ est la somme de deux vecteurs de même origine, on trace le parallélogramme ABDC.

Comme ABDC est un parallélogramme, les segments [AD] et [BC] ont même milieu O.

2) Pour construire le point E, on trace la parallèle à (BC) passant par A. On reporte la longueur BC.

   Comme ABDC est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$

   Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, alors ABCE est un parallélogramme. On a alors : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$

   Conclusion : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$, C est donc le milieu de [ED].

3) On sait que les segments [AD] et [BC] ont même milieu O. Donc (AO) = (AD) est la médiane issue de A dans le triangle ABC.
   On sait de plus que ABCE est un parallélogramme, donc les segments [AC] et [BE] ont même milieu O′. Donc (BO′) est la médiane issue de B dans le triangle ABC. Comme (BO′) = (BE), (BE) est la médiane issue de B dans le triangle ABC.
   Comme I est l'intersection de deux médianes du triangle ABC, I est le centre de gravité du triangle ABC.

   Des propriétés du centre de gravité, on en déduit alors que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$$

3.3 Propriétés de la multiplication par un scalaire

Propriété 3 : La multiplication d'un vecteur par un scalaire, obéit à la bilinéarité, c'est à dire :

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$$

$$(k + k')\,\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\,\vec{u}$$

Remarque : Ces deux propriétés permettent de développer des expressions vectorielles comme des équations numériques. Elles permettent donc de résoudre des équations vectorielles, c'est à dire permettent à la géométrie d'avoir accès à la performance de l'algèbre.

Les mathématiciens ont généralisé les propriétés de l'addition et de la multiplication par un scalaire. Ils ont créé des objets appelés *vecteurs* qui ont les mêmes propriétés que nos vecteurs géométriques et ont donné à l'ensemble qui les contient munie de l'addition et de la multiplication par un scalaire le nom d'*espace vectoriel*. Cette structure d'espace vectoriel joue un rôle très important dans les mathématiques actuelles.

3.4 Exercice d'application

Le but de cet exercice est de placer un point à l'aide d'une relation vectorielle
A et B sont deux points tels que AB=6 cm. Placer les points M et N définis par les relations suivantes :

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{0}$$

Pour placer les points M et N, il faut exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ici, on a privilégié le point A, on aurait pu le faire avec le point B.

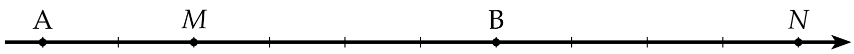
- Pour le point M

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{AM} &= -\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

- Pour le point N

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} &= \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{NA} - 5(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{AN} - 5\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{BA} \\ -3\overrightarrow{NA} &= 5\overrightarrow{AB} \\ 3\overrightarrow{AN} &= 5\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

On obtient alors la figure suivante :



4 Colinéarité de deux vecteurs

⚠ On ne parle pas de parallélisme pour des vecteurs car ils n'ont pas de point d'application mais de colinéarité.

4.1 Définition

Définition 3 : On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \vec{v} = k\,\vec{u}$$

Remarque : Cela découle directement de la définition du produit d'un vecteur par un scalaire.

4.2 Théorèmes

Théorème 2 : Parallélisme et alignement

- Deux droites (AB) et (CD) sont *parallèles* si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires c'est à dire que :

$$(AB) \,//\, (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$$

- Les point A, B et C sont *alignés* si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est à dire que :

$$A,\ B,\ C \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$$

Remarque : Ces deux théorèmes sont très important car ils permettent de relier le parallélisme et l'alignement à l'aide de vecteurs.

4.3 Exercices d'application

a) Exercice 1 : parallélisme

ABC est un triangle et P le point défini par : $5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

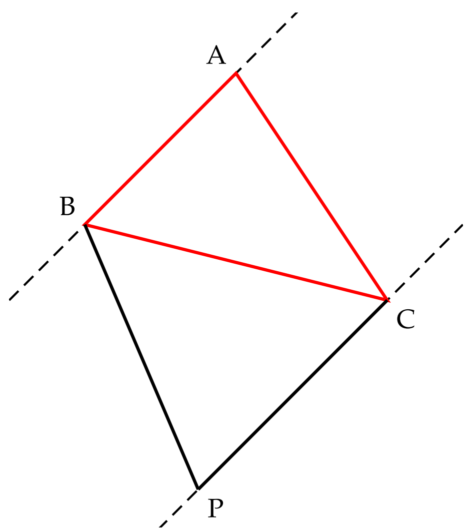
Montrer que ABPC est un trapèze.

Pour montrer que ABPC est un trapèze, il faut montrer que les droites (CP) et (AB) sont parallèles, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

or on sait que : $5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, donc

$$5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 4\overrightarrow{PC} = -5\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad -4\overrightarrow{CP} = -5\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (CP) et (AB) sont parallèles et donc ABPC est un trapèze.



b) Exercice 2 : l'alignement

ABC est un triangle. M et N sont les points tels que :

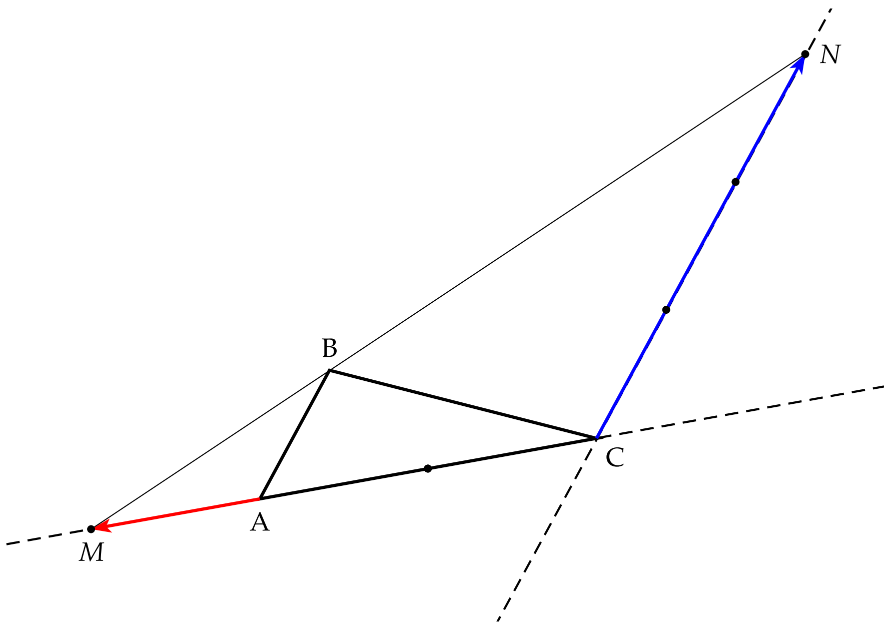
$$\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$$

1) Placer les point M et N.
2) Montrer que les points B, M et N sont alignés.

1) Pour placer les point M et N, on utilise les relations :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$$

On obtient alors :



2) Pour montrer que les points B, M et N sont alignés, il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires. Pour cela, on exprime ces deux vecteurs à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \\
\text{or } \overrightarrow{AM} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\text{donc } \overrightarrow{BM} &= -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
-2\overrightarrow{BM} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Pour l'autre vecteur

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\
\text{or } \overrightarrow{CN} &= 3\overrightarrow{AB} \\
\text{donc } \overrightarrow{BN} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{BN} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

On obtient alors la relation : $\overrightarrow{BN} = -2\overrightarrow{BM}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et donc les points M, B et N sont alignés.

c) Exercice 3

ABC est un triangle et I est le milieu de [AB].

1) a) Construire le point J tel que : $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$.

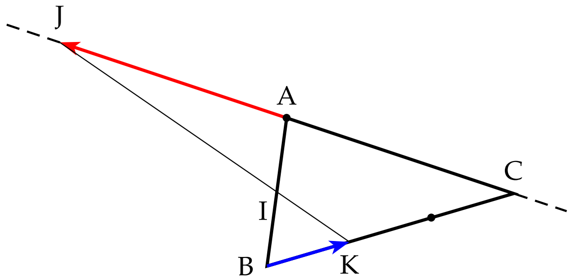
   b) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2) On note K le point tel que : $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

   a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Placer K.

   b) En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Quelle relation lie $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$? Que peut -on conclure ?

1) a) On a la figure suivante :



   b) On sait que I est le milieu de [AB], donc on a : $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On a alors :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

2) a) On a la relation : $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. On introduit le point B dans $\overrightarrow{KC}$

$$2\overrightarrow{KB} + (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, on place alors le point K.

   b) Expression de $\overrightarrow{IK}$: $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

   En introduisant A dans $\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

   On a donc : $-3\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

   Conclusion : $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et donc les points J, I et K sont alignés.

5 Géométrie analytique

Le but le la géométrie analytique est de résoudre numériquement un problème de géométrie. Cela suppose la notion de coordonnées et de repère. Le progrès qu'a apporté la géométrie analytique est énorme car il a permit de faire un « pont » entre l'algèbre et la géométrie qui jusque là était deux disciplines bien séparées.

Depuis l'apparition de l'ordinateur, la géométrie analytique devient indispensable pour visualiser des figures géométriques

5.1 Repère

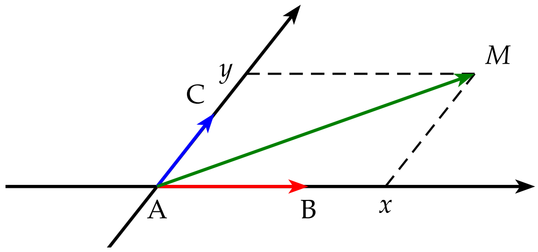
a) Repère quelconque

Trois points A, B, C non alignés du plan définissent un repère : $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$

On a alors : $\mathrm{M}(x;y)$

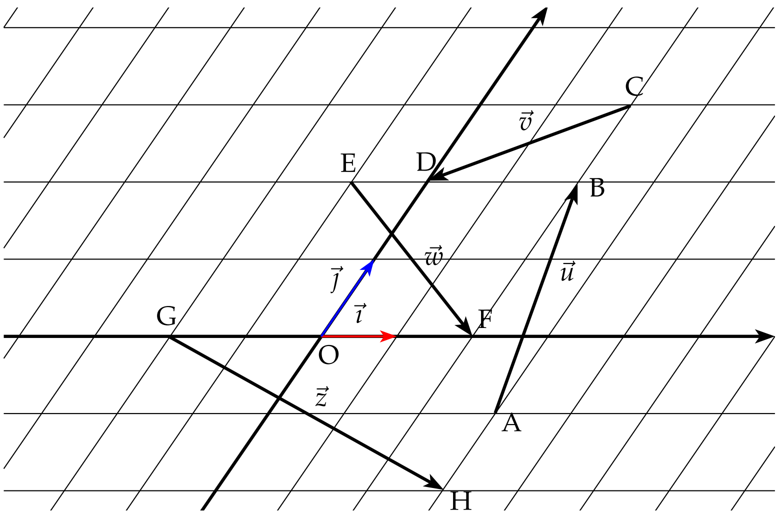
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

on écrit $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,(x;y)$



D'une autre façon, un repère est défini par :
- un point origine : O.
- 2 vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Le couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une « base » du plan, c'est à dire que ce couple peut engendrer tous les vecteurs du plan.

L'ensemble $(\,\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$ définit un repère du plan.



On peut alors lire les coordonnées des points de A à H.

$\mathrm{A}(3;-1)$, $\mathrm{B}(2;2)$, $\mathrm{C}(2;3)$, $\mathrm{D}(0;2)$, $\mathrm{E}(-1;2)$, $\mathrm{F}(2;0)$, $\mathrm{G}(-2;0)$, $\mathrm{H}(3;-2)$

Si on considère un point M de coordonnées $(x;y)$ quelconque, on a alors à l'aide des vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \quad \text{que l'on écrit} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,(x;y)$$

De même les on peut lire les coordonnées des vecteurs de $\vec{u}$ à $\vec{z}$

$$\vec{u}(-1;3),\quad \vec{v}(-2;-1),\quad \vec{w}(3;-2),\quad \vec{z}(5;-2)$$

On peut alors traduire les vecteurs de $\vec{u}$ à $\vec{z}$

$$\vec{u}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath},\quad \vec{v}=-2\vec{\imath}-\vec{\jmath},\quad \vec{w}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath},\quad \vec{z}=5\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$$

Remarque : Notations des coordonnées d'un point M ou d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$:

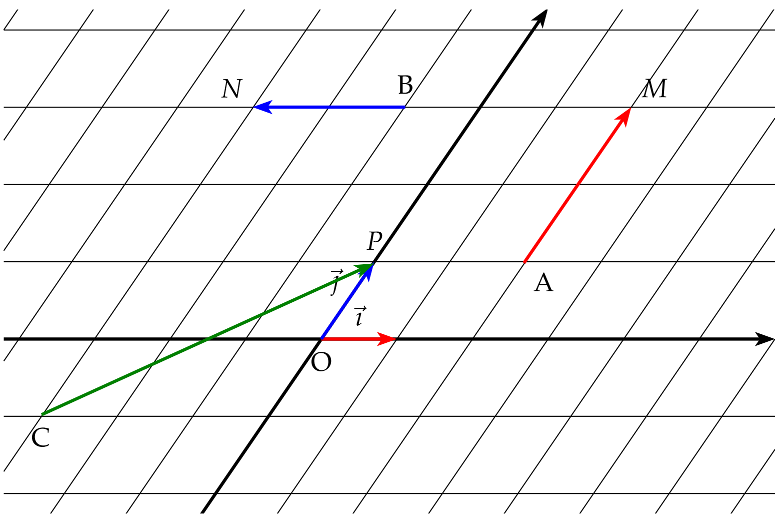
Notation matrice ligne : $\mathrm{M}(x;y)$ et $\overrightarrow{OM}\,(x;y)$

Notation matrice colonne : $\mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

b) Exercices sur un repère quelconque

Placer les points A, B, C, M, N et P dans un repère quelconque tels que :

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath},\quad \overrightarrow{OB}=-1\vec{\imath}+3\vec{\jmath},\quad \overrightarrow{OC}=-3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{AM}=0\vec{\imath}+2\vec{\jmath},\quad \overrightarrow{BN}=-2\vec{\imath}+0\vec{\jmath},\quad \overrightarrow{CP}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$$



5.2 Coordonnées de vecteurs

Théorème 3 : Soit deux points $\mathrm{A}(x_A;y_A)$ et $\mathrm{B}(x_B;y_B)$. On a alors les relations suivantes :

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$

2) Les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont : $\left(\dfrac{x_B+x_A}{2}\,;\,\dfrac{y_B+y_A}{2}\right)$

Exemple : Le plan est muni d'un repère quelconque. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du milieu I du segment [AB]

1) $A(1;-5)$ et $B(3;-9)$
2) $A(-3;\sqrt{2})$ et $B(2;-\sqrt{2})$
3) $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(\frac{1}{3};-5\right)$

1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad I = \left(\frac{3+1}{2}\,;\,\frac{-9-5}{2}\right) = (2\,;\,-7)$

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -\sqrt{2}-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\qquad I = \left(\frac{2-3}{2}\,;\,\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{2} \\ -5-\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{23}{4} \end{pmatrix}$ $\qquad I = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\,;\,\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-5\right)\right) = \left(\frac{5}{12}\,;\,-\frac{17}{8}\right)$

5.3 Calculs en géométrie analytique

Théorème 4 : Soit deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

1) $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si $x = x'$ et $y = y'$

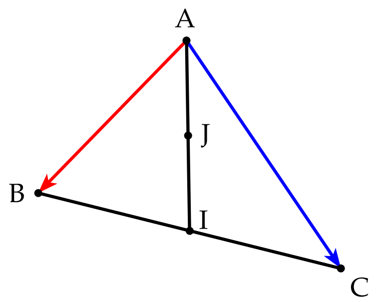
2) Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont : $(x+x';y+y')$

3) Les coordonnées de $k\,\vec{u}$, avec $k \in \mathbb{R}$ sont : $(k\,x;k\,y)$

Exemple : ABC est un triangle, I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AI]. On choisit le repère $(A;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.
1) Calculer les coordonnées de I et J.
2) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$$

1) Faisons une figure et déterminons les coordonnées de I et J.



On a donc dans ce repère :
$A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
On obtient alors :

$$I = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} \\ \frac{1+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2) On calcule le vecteur $\vec{u}$: $\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1-\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Autre exemple dans un repère orthonormal

Les points A, B et C sont tels que : $A(-2;-3)$, $B(5;0)$ et $C(0;7)$. G est le centre de gravité du triangle ABC.

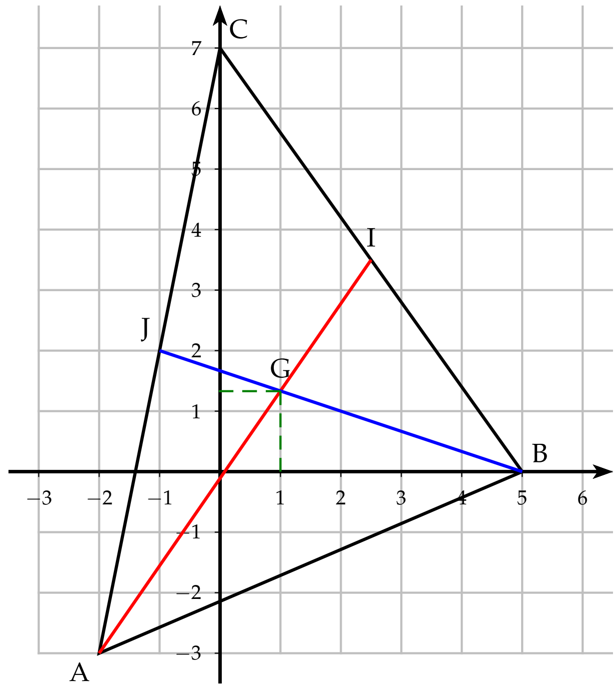
1) a) Calculer les coordonnées du milieu I de [BC].

   b) Quel est le nombre k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$?

   c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$. En déduire celles de $\overrightarrow{AG}$ puis celles de G.

2) Prouver que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

1) a) Faisons d'abord une figure :



On trouve alors les coordonnées de I : $I = \left(\dfrac{5+0}{2}\,;\,\dfrac{0+7}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$

b) D'après les propriétés du centre de gravité on a : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

c) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$ puis de G.

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{5}{2}+2\,;\,\frac{7}{2}+3\right) = \left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right) \qquad \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right) = \left(3\,;\,\frac{13}{3}\right)$$

Si on appelle $(x;y)$ les coordonnées de G, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x-(-2)=3 \\ y-(-3)=\dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2) En utilisant un calcul matriciel, on a :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\begin{pmatrix}-2-1\\-3-\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5-1\\0-\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0-1\\7-\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-\frac{13}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\\frac{17}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3+4-1\\-\frac{13}{3}-\frac{4}{3}+\frac{17}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

L'égalité : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ correspond à la définition vectorielle du centre de gravité d'un triangle.

5.4 Colinéarité en géométrie analytique

Définition 4 : On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x',y')$ le nombre noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$$

On effectue le produit de la 1^re^ diagonale moins le produit de la 2^e^

Exemple : On donne $\vec{u}(3;5)$ et $\vec{v}(-2;1)$. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3\times 1-(-2)\times 5=3+10=13$$

Théorème 5 : Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=0 \quad\Leftrightarrow\quad xy'-x'y=0$$

Exemple : Dans chacun des deux cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire :

1) $\vec{u}(10;-5)$ et $\vec{v}(-4;2)$ 2) $\vec{u}(3;-2)$ et $\vec{v}(6;-1)$

1) Calculons le déterminant des vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}10 & -4\\ -5 & 2\end{vmatrix}=10\times 2-(-4)\times(-5)=20-20=0$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires.

2) Calculons le déterminant des vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 6 \times (-2) = -3 + 12 = 9$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Remarque : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles. Parfois le calcul du déterminant ne s'impose pas car le rapport est immédiat. C'est le cas par exemple de : $\vec{u}(2;4)$ et $\vec{v}(4;8)$ où l'on observe que $\vec{v} = 2\vec{u}$

5.5 Exercices d'application

a) Exercice 1

Dans les cas suivants, les point M, N et P sont-il alignés ?

1) $\text{M}(4;-1), \text{N}(7;-3), \text{P}(-5;5)$
2) $\text{M}(-2;3), \text{N}(-3;7), \text{P}(-5;14)$
3) $\text{M}\left(2, -\dfrac{1}{3}\right), \text{N}(3;-1), P(0;1)$

Si les point M, N et P sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ sont colinéaires.

1) Calculons le déterminant :

$$\det(\overrightarrow{\text{MN}}, \overrightarrow{\text{MP}}) = \begin{vmatrix} 7-4 & -5-4 \\ -3-(-1) & 5-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$$

Le déterminant est nul donc les vecteurs sont colinéaires et donc les points M, N et P sont alignés.

2) Calculons le déterminant :

$$\det(\overrightarrow{\text{MN}}, \overrightarrow{\text{MP}}) = \begin{vmatrix} -3+2 & -5-(-2) \\ 7-3 & 14-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -11 + 12 = 1$$

Le déterminant n'est pas nul donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

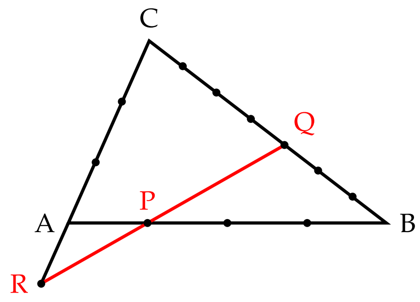
3) Calculons le déterminant :

$$\det(\overrightarrow{\text{MN}}, \overrightarrow{\text{MP}}) = \begin{vmatrix} 3-2 & 0-2 \\ -1-\left(-\frac{1}{3}\right) & 1-\left(-\frac{1}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

Le déterminant est nul donc les vecteurs sont colinéaires et donc les points M, N et P sont alignés.

b) Exercice 2

ABC est un triangle, P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (CA) disposés comme sur le dessin. Les graduations sur les droites sont régulières. Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.



En l'absence de tout repère, on peut se donner comme repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$. Pour montrer que les points P, Q et R sont alignés, il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont colinéaires. Il faut donc que le déterminant de $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ soit nul.

D'après les graduations du dessin, on obtient comme coordonnées pour les points P et R :

$$R\left(0;-\frac{1}{3}\right) \quad P\left(\frac{1}{4};0\right)$$

Pour le point Q, on utilise la relation :

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

On obtient alors les coordonnées de $Q\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$.

On calcule ensuite les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-0 \\ 0+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7}-0 \\ \frac{3}{7}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{16}{21} \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite le déterminant de $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$:

$$\det(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{16}{21} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\times\frac{16}{21} - \frac{4}{7}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{21} - \frac{4}{21} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont donc colinéaires et donc les points P, Q et R sont alignés.

5.6 Distance entre deux points

Théorème 6 : Dans un repère **orthonormé**, la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est définie par la relation :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Remarque : Un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est tel que : $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = 1$

Les axes sont alors perpendiculaires et les unités identiques sur les deux axes.

Démonstration : Cette formule découle du théorème de Pythagore :

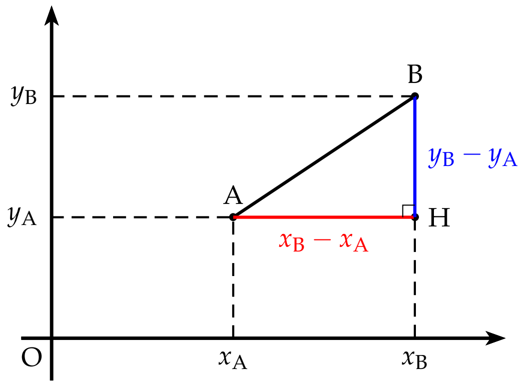
Le triangle ABH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

En remplaçant par les coordonnées :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

On retrouve la formule de AB en prenant la racine carrée



Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, déterminer la distance AB

1) $A(1;5)$ et $B(3;9)$

2) $A(-3; -\sqrt{2})$ et $B(2; \sqrt{2})$

1) $AB^2 = (3-1)^2 + (9-5)^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ donc $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2) $AB^2 = (2+3))^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = 5^2 + (2\sqrt{2})^2 = 25 + 8 = 33$ donc $AB = \sqrt{33}$

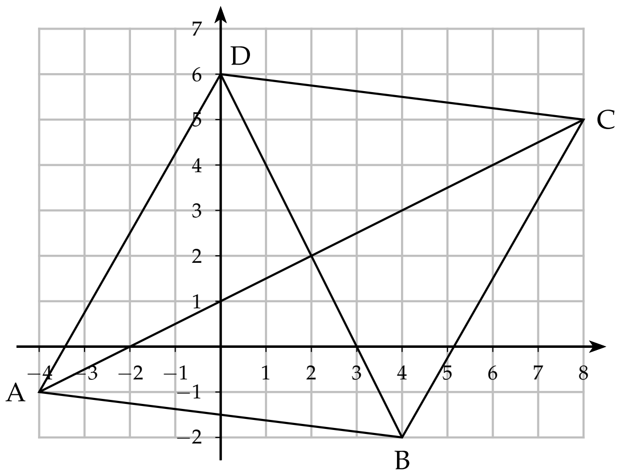
a) Exercice 1

On donne les points suivants : $A(-4; -1)$, $B(4; -2)$, $C(8;5)$, $D(0;6)$

1) a) Démontrer que [AC] et [BD] ont même milieu.

   b) Calculer les distances AB et BC

2) En déduire la nature du quadrilatère ABCD



1) a) On appelle I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Calculons les coordonnées de I et J.

$$I = \left(\frac{-4+8}{2}\,;\,\frac{-1+5}{2}\right) = (2\ \ 2) \qquad J = \left(\frac{4+0}{2}\ \ \frac{-2+6}{2}\right) = (2\ \ 2)$$

On a donc I = J. Les segments [AC] et [BD] ont même milieu.

b) Calculons les distances AB et BC :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(4-(-4))^2 + (-2+1))^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$$

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(8-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

On a donc : AB = BC

2) Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et possède deux côtés consécutifs de même longueur, donc ABCD est un losange.

b) Exercice 2

Placer les points : $\mathrm{A}\left(-1;\frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(2;\frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(0;\frac{5}{2}\right)$ et $\mathrm{D}\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

Le but de cet exercice est de trouver les coordonnées du point d'intersection M des droite (AB) et (CD).

1) a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

b) Prouver que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2) On appelle k le réel tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

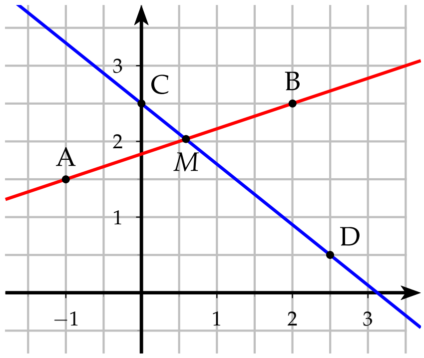
a) Exprimer les coordonnées de M en fonction de k.

b) Calculer mes coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ en fonction de k.

c) En utilisant la condition de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, calculer k.

d) En déduire les coordonnées du point M.

Faisons d'abord une figure :



1) a) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ \frac{5}{2}-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires. Calculons leurs déterminant :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - \frac{5}{2} = -\frac{17}{2}$$

Le déterminant est non nul, les droites (AB et (CD) sont donc sécantes.

2) a) De l'égalité $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} x-(-1) = 3k \\ y - \frac{3}{2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = k + \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) On en déduit alors les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x-0 \\ x-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k-1-0 \\ k+\frac{3}{2}-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

c) Comme M appartient aussi à la droite (CD) alors les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires. Leur déterminant est nul donc :

$$\det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3k-1 & \frac{5}{2} \\ k-1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6k+2-\frac{5}{2}(k-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{17}{2}k = -2 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{17}{2}k = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow k = \frac{9}{17}$$

d) On remplace cette valeur dans les coordonnées de $\mathrm{M}(x;y)$.

$$\begin{cases} x = 3 \times \dfrac{9}{17} - 1 = \dfrac{10}{17} \\ \\ y = \dfrac{9}{17} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{69}{34} \end{cases}$$