

C.1

- a) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 3]$. On en déduit l'implication :
 $0 < 1 \implies f(0) < f(1)$
- b) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[3; 5]$. On en déduit l'implication :
 $4 < 5 \implies f(4) > f(5)$
- c) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-3; 0]$. On en déduit l'implication :
 $-2 < -1 \implies f(-2) > f(-1)$
- d) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 3]$. On en déduit l'implication :
 $1 < 2 \implies f(1) < f(2)$

C.2

- a) f est croissante sur $[-\frac{9}{2}; -1]$:
 $f(-3) < f(-2)$
- b) f est décroissante sur $[0; 3]$:
 $f(1) > f(2)$
- c) $f(-5) > f(3)$
- d) $f(6) < f(-4)$
- e) $f(-4,75) \in [-2; 2]$ et $f(7) \in [-3; 0]$.
 On ne peut conclure.
- f) $f(-10) \in [-2; 5[$ et $f(-3) \in [2; 6]$.
 On ne peut conclure.
- g) $f(-6) > f(4)$
- h) $f(7) < f(-2)$.

C.3

- a) On a la comparaison :
 $7 < 8$
 La fonction f est décroissante sur $[7; 8]$:
 $f(7) > f(8)$
- b) D'après le tableau de variation, on a :
 $f(-9) \in [3; 4]$; $f(1) \in [-3; 4]$
 On en peut comparer les deux nombres $f(1)$ et $f(-9)$.
- c) D'après le tableau de variation, on a :
 $f(-3) \in [-3; 4]$; $f(3) \in [-3; 2]$
 On ne peut conclure sur la comparaison des images des nombres -3 et 3 .
- d) On a la comparaison :
 $-8 < -5$
 La fonction f est croissante sur $[-10; -4]$:
 $f(-8) < f(-5)$

C.4

- 1) La fonction f a pour ensemble de définition l'intervalle $[0; 7]$

2)	x	0	1	2,5	4,5	6	7
	Variation de f		3		4		2,5
		2		0		1	

- 3) Sur $[0; \frac{5}{2}]$, la fonction f atteint son maximum 3 pour $x=1$.
- 4) La valeur maximale prise par la fonction f sur son ensemble de définition est 4; cette valeur sera atteinte pour $x=4,5$
- 5) Le minimum de la fonction f est 0 et est atteinte pour $x=2,5$

C.5

- a) **Vrai** : à l'aide du tableau de variation, on obtient l'égalité : $f(-2) = 3$.
 Le nombre -2 est un antécédent du nombre 3 par la fonction f .
- b) **Faux** : l'image de 1 par la fonction f est un nombre négatif.
 La fonction f est croissante sur $[-2; 0]$ et admet 3 pour minimum : $f(-1)$ est un nombre strictement positif.
 On en déduit la comparaison suivante : $f(1) < f(-1)$
- c) **Indécidable** : d'après le tableau de variation, on a :
 $f([1; +\infty[) = [-4; 3[$
 L'image du nombre 2 peut être soit positive, soit négative.
- d) **Vrai** : sur \mathbb{R} , la fonction f décroît par deux fois. Elle atteint deux minimums locaux dont les valeurs sont 3 et -4 .
 Ainsi, sur \mathbb{R} , le minimum de la fonction f est -4 .
- e) **Vrai** : par la fonction f , on a les images suivantes d'intervalles :
 • $f([-\infty; -2]) = [3; 5]$
 • $f([-2; 0]) = [3; 7]$
 On en déduit que la fonction est strictement positive sur l'intervalle $]-\infty; -2]$.
- f) **Faux** : en fait, la fonction f admet trois antécédents du nombre 4; chacun de ses antécédents appartient à l'un des intervalles $]-\infty; -2]$, $[-2; 0]$ et $[0; 1]$.

C.6

- 1) **Faux** : car d'après le tableau de signe, on voit que tous les nombres de l'intervalle $]-3; 5[$ ont une image négative.
- 2) **Vrai** : le tableau de signes nous indique que la fonction f s'annule pour les valeurs -3 et 5 .
- 3) **Faux** : une fonction affine, non constante, étant strictement décroissante ou strictement croissante, elle ne s'annule qu'une seule fois.
- 4) **Faux** : d'après le tableau de signe, l'image de 0 est un nombre négatif; par contre, le point $(5; 0)$ est un point de \mathcal{C}_f .

- 5 On ne peut pas savoir : le minimum de la fonction f est atteint sur l'intervalle $] -3; 5[$, mais non nécessairement atteint pour la valeur 1.

C.7

- a $3(x-5) - 2x(1-2x) = 3x - 15 - 2x + 4x^2$
 $= 4x^2 + x - 15$
 b $3(x+2) - 4(2-2x)$
 $= 3x + 6 - 8 + 8x = 11x - 2$

C.8

- a $(2x+1)(3-2x) = 6x - 4x^2 + 3 - 2x$
 $= -4x^2 + 4x + 3$
 b $(x-3)(-x-1) = -x^2 - x + 3x + 3$
 $= -x^2 + 2x + 3$

C.9

- a $(2-3x)(3+2x) + (3x+2)(-6x-9)$
 On a l'égalité : $-6x-9 = -3(2x+3)$
 $= (2-3x)(3+2x) + (3x+2)[-3(2x+3)]$
 $= (2x+3)[(2-3x) - 3(3x+2)]$
 $= (2x+3)(2-3x-9x-6)$
 $= (2x+3)(-12x-4)$
 $= -4(2x+3)(3x+1)$
 b $(2x+1)(2x+3) + 2(2x+3)$
 $= (4x^2 + 6x + 2x + 3) + (4x + 6)$
 $= 4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$

C.10

- a $(5x+2)(3x+4) + (x-2)(3x+4)$
 $= (3x+4)[(5x+2) + (x-2)]$
 $= (3x+4)(5x+2+x-2) = (3x+4)6x$
 $= 6x(3x+4)$
 b $(3-x)(2x+4) - (3-x)(3x-4)$
 $= (3-x)[(2x+4) - (3x-4)]$
 $= (3-x)(2x+4-3x+4) = (3-x)(-x+8)$

C.11

- 1 La valeur de la variable x doit appartenir à l'intervalle $]0; 6[$.
 Car une longueur ne peut être négative et si la valeur de x dépassait 6 alors il n'y aurait plus d'aire de jeu.
 2 a L'aire de jeu a pour longueur $16-2x$ et pour largeur $12-2x$; ainsi, l'aire de jeu a pour aire :
 $(16-2x)(12-2x) = 192 - 32x - 24x + 4x^2$
 $= 4x^2 - 56x + 192$
 b L'aire totale de ce terrain vaut : $16 \times 12 = 192 m^2$
 L'aire de l'allée se calcule via :
 $192 - (4x^2 - 56x + 192) = 192 - 4x^2 + 56x - 192$
 $= -4x^2 + 56x$
 3 a On a les manipulations algébriques suivantes :
 $8(x-12)(x-2) = (8x-96)(x-2)$
 $= 8x^2 - 16x - 96x + 192 = 8x^2 - 112x + 192$

- b Chercher les valeurs de x pour lesquelles l'aire de l'allée sera égale à celle de l'aire de jeu revient à résoudre l'équation suivante :

$$4x^2 - 56x + 192 = 56x - 4x^2$$

$$4x^2 - 56x + 192 - 56x + 4x^2 = 0$$

$$8x^2 - 112x + 192 = 0$$

$$8(x-12)(x-2) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x-12=0 \quad | \quad x-2=0$$

$$x=12 \quad | \quad x=2$$

Les solutions de cette équation sont : $\mathcal{S} = \{2\}$

C.12

- 1 On a les transformations algébriques suivantes :

- $f(x) - g(x) = (3x^2 + 3x - 4) - (x + 1)$
 $= 3x^2 + 3x - 4 - x - 1 = 3x^2 + 2x - 5$
- $(x-1)(3x+5) = 3x^2 + 5x - 3x - 5 = 3x^2 + 2x - 5$

On en déduit l'égalité des deux expressions :

$$f(x) - g(x) = (x-1)(3x+5)$$

- 2 Pour déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g en résolvant l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$(x-1)(3x+5) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x-1=0 \quad | \quad 3x+5=0$$

$$x=1 \quad | \quad 3x=-5$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

Ainsi, ces deux courbes s'intersectent aux points A et B d'abscisses 1 et $-\frac{5}{3}$. Déterminons les coordonnées de ces points :

- $g(1) = 1 + 1 = 2$
 On a : $A(1; 2)$
- $g\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{5}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{2}{3}$
 On a : $B\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

C.13

- a $(7x-2)(5-x) + (4x-1)(x-5)$
 $= (7x-2)(5-x) + (4x-1)[- (5-x)]$
 $= (7x-2)(5-x) - (4x-1)(5-x)$
 $= (5-x)[(7x-2) - (4x-1)]$
 $= (5-x)(7x-2-4x+1) = (5-x)(3x-1)$
 b $(2x-3)(4-7x) - (3x-2)(7x-4)$
 $= (2x-3)(4-7x) - (3x-2)[- (4-7x)]$
 $= (2x-3)(4-7x) + (3x-2)(4-7x)$
 $= (4-7x)[(2x-3) + (3x-2)]$
 $= (4-7x)(5x-5) = (4-7x)[5 \cdot (x-1)]$
 $= 5(4-7x)(x-1)$

C.14

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \bullet \quad f(x) - g(x) &= (-x - 2)(x + 3) - (3x^2 + 3x - 3) \\ &= -x^2 - 3x - 2x - 6 - 3x^2 - 3x + 3 \\ &= -4x^2 - 8x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (-2x - 1)(2x + 3) &= -4x^2 - 6x - 2x - 3 \\ &= -4x^2 - 8x - 3 \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$f(x) - g(x) = (-2x - 1)(2x + 3)$$

$\textcircled{2}$ Les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont solutions de l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$(-2x - 1)(2x + 3) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{l|l} -2x - 1 = 0 & 2x + 3 = 0 \\ -2x = 1 & 2x = -3 \\ x = -\frac{1}{2} & x = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} & \end{array}$$

Ainsi, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g s'intersectent en deux points dont les abscisses ont pour valeurs :

$$x = -\frac{3}{2} \quad ; \quad x = -\frac{1}{2}$$

