COURS : Dénombrement & Combinatoire

Table des matières

1 Langages des ensembles

1.1 Ensemble

La notion d'ensemble est une notion intuitive que l'on ne peut définir. Si un ensemble est une collection d'objets ou d'éléments, il faudrait alors définir le mot collection, etc. On prend alors le mot ensemble comme un **terme primitif**. On parle d'ensembles de nombres, de points, de fonctions etc.

Définition 1 : Définir un ensemble

Un **ensemble** est une collection d'éléments que l'on peut énumérer ou définir par une propriété. Un ensemble est noté par une majuscule (A, B, C, ...) et ses éléments par une minuscule $a, b, c \dots$

Certains ensembles ont des notations particulières (ex. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Un ensemble est défini par **extension** si l'on énumère tous ses éléments :

$$\mathrm{E} = \{a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\dots\}$$

Un ensemble est défini par **compréhension** si ses éléments sont définis par une propriété.

$$\mathrm{E} = \{x \in A,\ \ \mathrm{P}(x)\}$$

qui se lit : « E est l'ensemble des éléments de A vérifiant la propriété P ».

L'ensemble ne contenant aucun élément s'appelle : **l'ensemble vide** noté « $\varnothing$ ».

Exemples :

1) Ensembles définis par extension :
   - $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ ensemble des chiffres impairs.
   - $\{b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n\} = \{b_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ensemble de n boules.
2) Ensembles définis par compréhension :
   - $\{n \in \mathbb{N},\ \ 1 \leqslant n \leqslant 49\}$ ensemble des nombres d'une grille de loto
   - $2\mathbb{N} = \left\{x \in \mathbb{N},\ \ \dfrac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\}$ ensemble des entiers naturels pairs.

Remarque : Dans un ensemble les éléments sont non ordonnés et distincts. Un ensemble contenant qu'un élément s'appelle un **singleton** et deux éléments une **paire**.

1.2 Appartenance, inclusion, parties d'un ensemble

Définition 2 : Soit E et F deux ensembles avec E non vide .

- Si un élément a **appartient** à E, on écrit : $a \in \mathrm{E}$
- Si F est **inclus** dans E, alors F est un **sous-ensemble ou une partie** de E, soit :

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{E} \ \ \Leftrightarrow\ \ \forall a \in \mathrm{F},\ \ a \in \mathrm{E}\ \ \text{ou}\ \ \mathrm{F} = \varnothing.$$

- L'**ensemble des parties** de E est l'ensemble, noté, $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, constitué de tous les sous-ensembles de E.

Remarque : Une partie est un autre nom pour sous-ensemble.

⚠ Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$ qui sont très proche.

⚠ $\mathrm{E} = \{\varnothing\}$ est l'ensemble qui contient l'ensemble vide. E n'est donc pas vide !

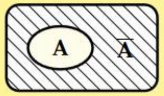
Exemples :

- On a la suite des inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Soit l'ensemble $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$. L'ensemble des parties de E est :
$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \mathrm{E}\}$$

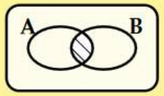
1.3 Opérations sur les ensembles

Définition 3 : On définit trois opérations élémentaires dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$:

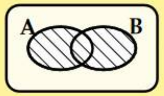
- Complémentaire de A dans E : $\overline{\mathrm{A}}$
$$x \in \overline{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{E} \text{ et } x \notin \mathrm{A}$$



- Intersection de A et B : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$
$$x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{A} \text{ et } x \in \mathrm{B}$$



- Union de A et B : $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$
$$x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}$$



Remarque : Quelques cas particuliers.

- $\overline{\mathrm{E}} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = \mathrm{E}$
- On dit que A et B sont disjoints si et seulement si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
- Si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B}$ alors, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.
- Si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$ alors, $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

1.4 Produit cartésien, p-upplet et p-liste

Définition 4 : Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F, noté $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$.

On généralise le produit cartésien à p ensembles : $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$ où les éléments sont des ***p*-upplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tel que : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in \mathrm{E}_i$.

Lorsque qu'il s'agit du même ensemble, on note alors : $\mathrm{E}^p = \underbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \cdots \times \mathrm{E}}_{p \text{ termes}}$

et les p-upplets sont appelés des ***p*-listes**.

Remarque : $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ se lit "E croix F".

Les éléments d'un couple, d'un p-upplet ou d'une p-liste sont appelés suivant le contexte : composantes coordonnées ou termes.

Une p-liste peut aussi se définir comme une suite de p éléments ordonnés, distincts ou non, d'un ensemble E.

⚠ Dans un couple, un p-upplet ou une p-liste, les éléments sont ordonnés et notés entre parenthèses contrairement à un ensemble où les éléments ne sont pas ordonnés et notés entre accolades.

Exemples : Soit $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathrm{B} = \{r, b\}$ alors :
$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(1, r), (1, b), (2, r), (2, b), (3, r), (3, b)\}$$

Un couple d'entiers naturels est un élément de $\mathbb{N}^2$.

Le couple de coordonnées d'un point du plan (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$.

Le triplet de coordonnées d'un point de l'espace (x, y, z) est un élément de $\mathbb{R}^3$.

Un mot de 5 lettres, compréhensible ou non, est une 5-liste de l'ensemble E^5 où E est l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

1.5 Principes additif et multiplicatif

Théorème 1 : On appelle **cardinal** d'un ensemble fini E, noté $|\mathrm{E}|$ ou Card(E), le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Soit E et F deux ensembles tels que $|\mathrm{E}| = n$ et $|\mathrm{F}| = p$.

- **Principe additif** : Si $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \varnothing$ alors, $|\mathrm{E} \cup \mathrm{F}| = n + p$.
- **Principe multiplicatif** : $|\mathrm{E} \times \mathrm{F}| = n \times p$.

Remarque : Par convention $|\varnothing| = 0$.

Exemples : Si un plat est composé d'une viande parmi 4 possibles ou d'un poisson parmi 3 possibles alors, il y a $4 + 3 = 7$ plats différents possibles.

En effet si $\mathrm{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ alors, $\mathrm{V} \cap \mathrm{P} = \varnothing$ donc $|\mathrm{V} \cup \mathrm{P}| = 7$.

Si à une boule on associe le numéro 1, 2 ou 3 et la couleur rouge ou bleue alors, il y a 3×2 boules différentes possibles.

En effet si $\mathrm{N} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathrm{C} = \{r, b\}$ alors $|\mathrm{N} \times \mathrm{C}| = 6$

2 Dénombrer avec les p-listes

2.1 Nombre de p-listes

Théorème 2 : Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est : n^p.

Remarque : : Une p-liste peut être associée à p tirages successifs avec remise dans une urne qui contient n boules.

Exemples :

1) Le nombre de code à 4 chiffres d'une carte bancaire est de : $10^4 = 10\,000$
2) Le nombre de résultats possibles lorsque l'on lance un dé à jouer 3 fois de suite est de : $6^3 = 216$.
3) Le nombre de rangements possibles de 5 paires de chaussettes dans trois tiroirs (il peut y avoir un ou 2 tiroir(s) vide(s)) est de : $3^5 = 243$

2.2 Nombre de permutations

Théorème 3 : Soit E un ensemble de n éléments.

Une permutation de E est un ordre possible des n éléments de E.

Le nombre de permutations de E est égal à $n\,!$ (factorielle n), avec :

$$n\,! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Remarque : Une permutation est une n-liste d'éléments distinct de E.

Exemples :

1) Nombre de classements possibles de 5 chevaux : $5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
2) Nombre d'anagrammes avec le mot « ACHILE » : $6\,! = 6{\times}5 \times \ldots \times 2{\times}1{=}720$.
   ⚠ Bien remarquer que les 6 lettres du mot « ACHILE » sont distinctes.

2.3 Calculer avec les factorielles

Propriété 1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\,! = (n+1)n\,!$ et $0\,! = 1$.

Avec cette propriété, on peut proposer le programme récursif en Python pour calculer $n\,!$

```python
def fact(n):
    if n==0:
        return 1
    else :
        return n*fact(n-1)
```

Sans calculatrice, quelques exemples de calculs avec les factorielles :

- $\dfrac{21!}{20!} = \dfrac{21 \times 20!}{20!} = 21$
- $\dfrac{6! - 5!}{5!} = \dfrac{5!(6-1)}{5!} = 5$
- $\dfrac{6 \times 4!}{5!} = \dfrac{6 \times 4!}{5 \times 4!} = \dfrac{6}{5}$
- $\dfrac{9!}{5! \times 4!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2} = 126$

Expressions sous forme de factorielles :

- $\dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = \dfrac{9!}{3! \times 4!}$
- $n(n+1)(n+2) = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

Simplifications :

- $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n+1) \times (n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$
- $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$

2.4 Nombre de p-listes d'éléments distincts - Arrangements

Théorème 4 : Soit E un ensemble de n éléments et $p \leqslant n$.

Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

Remarque : Une p-listes d'élément distincts peut être associée à p tirages successifs sans remise dans une urne qui contient n boules.

Une p-listes d'éléments distincts est parfois appelée arrangement de p éléments parmi n. Le nombre d'arrangements est alors noté : A_n^p

Exemples :

1) Le nombre de tiercés d'une course hippique dans l'ordre avec 18 chevaux au départ est de : $\dfrac{18!}{(18-3)\,!} = \dfrac{18!}{15!} = 4\,896$
2) Le nombre de tirages successifs, sans remise, de 4 boules dans une urne comportant 9 boules numérotées de 1 à 9 est de : $\dfrac{9!}{(9-4)\,!} = \dfrac{9!}{5!} = 3\,024$

3 Combinaisons

3.1 Nombre de combinaisons

Définition 5 : Soit E un ensemble de n éléments et $p \leqslant n$.
Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E, noté $\dbinom{n}{p}$, est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque : Le nombre de combinaison est parfois noté : $C_n^p = \dbinom{n}{p}$.

Une combinaison de p éléments parmi n peut-être associée à un tirage simultané de p boules dans une urne qui en comporte n.

Exemples :

1) Soit un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Les combinaisons de 2 éléments de E sont : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$
   Le nombre de combinaisons de 2 parmi 4 vaut : $\dbinom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)} = \dfrac{4\times 3}{2} = 6$
2) Le nombre de délégations de 4 personnes que l'on peut désigner dans un groupe de 15 personnes est de :

$$\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!(15-4)\,!} = \frac{\overbrace{15\times 14\times 13\times 12}^{4 \text{ termes}}}{4\times 3\times 2} = 15\times 7\times 13 = 1\,365$$

3.2 Propriétés des coefficients binomiaux

Théorème 5 : Pour tous entiers naturels n et p, tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$
- $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$
- $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$
- **Relation de Pascal :** $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$

Exemple : $\dbinom{7}{0} = \dbinom{7}{7} = 1$, $\quad \dbinom{8}{1} = \dbinom{8}{7} = 8$, $\quad \dbinom{6}{4} = \dbinom{6}{2} = 15$

Remarque : Construire une partie de p éléments de E revient à construire une partie à $(n-p)$ éléments de E (ceux qui restent) donc : $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$

Démonstration : Relation de Pascal :

- **Par une méthode combinatoire :**

  Dans un ensemble à $(n+1)$ éléments, on choisit un élément a.

  Dans les parties à $(p+1)$ éléments on distingue les parties contenant a ou non.

  1) Pour les parties contenant a, il reste à choisir p éléments parmi les n restants.
     Il y a alors $\dbinom{n}{p}$ parties de $(p+1)$ éléments qui contiennent a.
  2) Pour les parties ne contenant pas a, on choisit $(p+1)$ éléments parmi les n restants.
     Il y a alors $\dbinom{n}{p+1}$ parties de $(p+1)$ éléments qui ne contiennent pas a.
  3) Conclusion : on obtient l'égalité $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$.

- **Par le calcul :**

On rappelle que : $(p+1)\,! = (p+1)p\,!$ et $(n-p)\,! = (n-p)(n-p-1)\,!$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \underbrace{\frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!} + \frac{n\,!}{(p+1)\,!(n-p-1)\,!}}_{\text{DC}=(p+1)\,!(n-p)\,!}$$

$$= \frac{n\,!(p+1) + n\,!(n-p)}{(p+1)\,!(n-p)\,!} = \frac{n\,!(n+1)}{(p+1)\,!(n-p)\,!} = \frac{(n+1)\,!}{(p+1)\,!(n-p)\,!}$$

$$= \frac{(n+1)\,!}{(p+1)\,!\,[(n+1)-(p+1)]\,!} = \binom{n+1}{p+1}$$

3.3 Triangle de Pascal

La **formule de Pascal** permet de :

calculer les coefficients d'ordre $(n+1)$ à partir des coefficients d'ordre n.

Ces coefficients forment le triangle de Pascal.

Exemple : pour les cases rouges :

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 4+6=10$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Python : Dans la fonction pascal(n) :

On initialise une première liste L_1 à [1].

On boucle n fois, pour les n lignes du tableau.

On rajoute l'élément [1] à la fin de la ligne précédente L_1 dans la ligne suivante L_2.

On boucle sur p pour déterminer les coefficients de L_2 à partir L_1 et de la formule de Pascal en commençant à l'indice 1.

```
def pascal(n):
    L1=[1]
    print(L1)
    for i in range(n):
        L2=L1+[1]
        for p in range(i):
            L2[p+1]=L1[p]+L1[p+1]
        print(L2)
        L1=L2[:]
```

⚠ Pour recopier L_2 dans L_1 ne pas coder : $L_1 = L_2$ mais $L_1 = L_2[:]$

pascal(5) : $[1]$; $[1,1]$; $[1,2,1]$; $[1,3,3,1]$; $[1,4,6,4,1]$; $[1,5,10,10,5,1]$.

3.4 Nombre de parties d'un ensemble

Théorème 6 : Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est : 2^n.

On a alors la relation : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

Démonstration : Soit un ensemble $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Pour construire un sous-ensemble de E, on procède de la façon suivante :

- À chaque élément de E on associe le nombre 1 si l'on sélectionne l'élément et le nombre 0 dans le cas contraire.
- À chaque sous-ensemble de E correspond alors une unique n-liste de l'ensemble $\{0,1\}$. Par exemple :
  $(0,0,\dots,0)$ correspond à $\varnothing$, $(1,0,\dots,0)$ correspond à $\{e_1\}$,
  $(1,1,0,\dots,0)$ correspond à $\{e_1,e_2\}$ et $(1,1,\dots,1)$ correspond à E.

Le nombre de parties de E correspond au nombre de n-listes de la paire $\{0,1\}$: 2^n.

$\binom{n}{p}$ correspond au nombre de parties de E à p éléments, donc la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ correspond au nombre de toutes les parties de E, d'où : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$.

4 Résumé des situations

4.1 Critères à retenir

Pour dénombrer toutes les éventualités d'un problème, les deux critères à prendre en compte sont : les éléments peuvent-ils être répétés ? L'ordre des éléments est-il à prendre en compte ? On résume alors les différentes réponses par le tableau :

Critères	Répétition	Non répétition
Ordre	p-listes	p-listes d'éléments distincts
Pas d'ordre	Combinaisons avec répétition (hors programme)	Combinaisons

Exemples :

1) **Le loto** : on tire, au hasard, 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles ?

- Peut-on obtenir plusieurs fois le même numéro lors d'un tirage ?
  Non Donc pas de répétition.
- L'ordre d'apparition des différents numéros a-t-il de l'importance ?
  Non On considère les six numéros globalement ! Donc pas d'ordre.

  On utilise les combinaisons : $\binom{49}{6} = \dfrac{49!}{6!(49-6)!} = 13\,983\,816.$

2) **Podium** : Huit coureurs participent à la finale du 100 m. On décerne trois médaillés (or, argent et bronze). Combien y a-t-il de podiums possibles ?

- Peut-on obtenir plusieurs fois le même coureur sur un podium ?
  Non Un même coureur ne peut pas être à la fois médaillé d'or et d'argent ! Donc pas de répétition.
- L'ordre d'apparition des coureurs sur le podium a-t-il de l'importance ?
  Oui Car les médailles sont différentes. L'ordre est ici déterminant.

  On utilise des p-listes d'éléments distincts : $\dfrac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$

3) **QCM** : un QCM de 15 questions comporte 4 choix (a, b, c, d) dont un seul exact par question. Combien y a-t-il de façons de répondre à ce QCM ?

- Peut-on obtenir plusieurs fois le même choix ?
  Oui car on peut avoir deux fois le choix a choisi. Donc répétition.
- L'ordre dans dans les choix a-t-il de l'importance ?
  Oui car un choix donné est associé à une question.
  On utilise des p-listes : $4^{15} = 1\,073\,741\,824$

Pour résoudre ce type d'exercice, il faut réaliser une partition du jeu de 32 cartes.

Définition 6 : On appelle partition d'un ensemble E, un ensemble de parties deux à deux disjoints dont l'union forme E.

4.2 Un exemple important : le jeu de cartes

On tire cinq cartes d'un jeu de 32 (du 7 à l'as). Nombre de mains contenant :

1) Le valet de trèfle ?
2) Exactement deux cœurs ?
3) Exactement un roi, une dame et deux valet ?
4) Ni le roi de trèfle, ni un pique ?
5) Au moins un roi ?
6) L'as de pique et au moins deux trèfles ?
7) Exactement un roi et deux carreaux ?

1) Partition $\boxed{\text{1 Valet de trèfle} \mid \text{31 autres cartes}}$

   Nombre de mains : $\binom{1}{1}\binom{31}{4} = 31\,465$

2) Partition : $\boxed{\text{8 cœurs} \mid \text{24 autres cartes}}$

   Nombre de mains : $\binom{8}{2}\binom{24}{3} = 56\,672.$

3) Partition : $\boxed{\text{4 rois} \mid \text{4 dames} \mid \text{4 valets} \mid \text{20 autres cartes}}$

   Nombre de mains : $\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{20}{1} = 1\,920.$

4) Partition : $\boxed{\text{1 roi de trèfle} \mid \text{8 piques} \mid \text{23 autres cartes}}$

   Nombre de mains : $\binom{1}{0}\binom{8}{0}\binom{23}{5} = 33\,649.$

5) Partition de la main contraire « aucun roi ». $\boxed{\text{4 rois} \mid \text{28 autres cartes}}$
   On soustrait le nombre totale de mains au nombre de mains contraires.

   Nombre de mains : $\binom{32}{5} - \binom{4}{0}\binom{28}{5} = 103\,096.$

6) Partition : $\boxed{\text{1 as de pique} \mid \text{8 trèfles} \mid \text{23 autres cartes}}$
   Différents choix : avoir l'as de pique avec 2, 3 ou 4 trèfles.

   Nombre de mains : $\binom{1}{1}\left[\binom{8}{2}\binom{23}{2} + \binom{8}{3}\binom{23}{1} + \binom{8}{4}\binom{23}{0}\right] = 8\,442.$

7) Partition : $\boxed{\text{1 roi de carreau} \mid \text{3 autres rois} \mid \text{7 autres carreaux} \mid \text{21 autres cartes}}$
   Choix de mains : le roi de carreau et 1 autre carreau ou un roi (non de carreau) et deux carreaux.

   Nombre de mains : $\binom{1}{1}\binom{3}{0}\binom{7}{1}\binom{21}{3} + \binom{1}{0}\binom{3}{1}\binom{7}{2}\binom{21}{2} = 22\,540.$