Les Équations Différentielles – Tale spé maths

A) Équations différentielles linéaires du 1er ordre

1) Les équations homogènes

Définition : Une é**quation différentielle** du 1er **ordre** est une équation où intervient une fonction f , sa dérivée $f\,'$ et d'autres fonctions g, h … ainsi que des constantes a, b, c … et dont on cherche une **expression** de la fonction f

- cette équation différentielle est **linéaire** si $f\,'(x)=a f(x)+b\,g(x)$
- cette équation différentielle est **homogène** si $f\,'(x)=a f(x)$

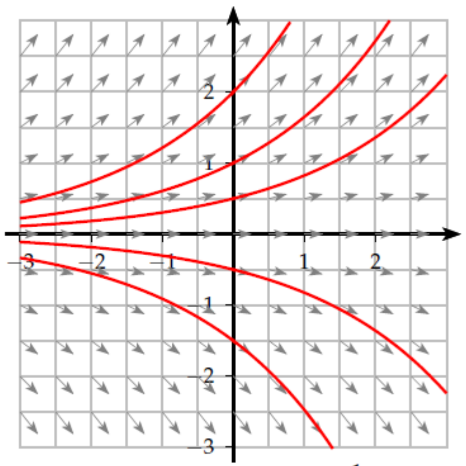
Notations : pour plus de lisibilité on note $y=f(x)$ et $y\,'=f\,'(x)$
ainsi une EDL1 du type $f\,'(x)=a f(x)+b\,g(x)$ sera notée $y\,'=a\,y+b$

Exemples : Indiquer la nature des équations différentielles suivantes
(E_1) : $2y\,'+3y=5$; (E_2) : $y^2=2y\,'$; (E_3) : $(y\,')^2=y$; (E_4) : $x\,y\,'=2y+1$

2) Résolution d'une EDL1 homogène

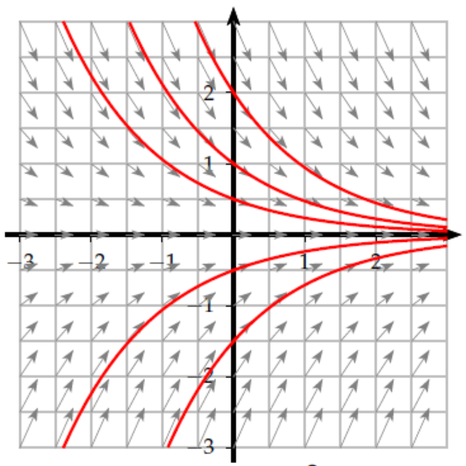
Théorème : On donne l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :
$(E_H): y\,'=a\,y$ où y est une fonction continue et $a\in\mathbb{R}$
Les fonctions solutions de (E_H) sont : $\boldsymbol{y(x)=k\,e^{ax}}$ où $k=cte$

Exemple : Courbes solutions suivants le signe de a et celui de k.



$k>0$

$k<0$



$a>0, \quad y'=\frac{1}{2}y$
Amplification

$a<0, \quad y'=-\frac{3}{4}y$
Atténuation

De plus il existe une unique solution vérifiant $f(x_0)=y_0$

Démonstration : Les fonctions de la forme $y(x)=k\,e^{ax}$ sont bien solutions de l'équation car $y'(x)=ka\,e^{ax}=ay(x)$.

Réciproquement supposons que g est une solution de l'équation, montrons que g est de la forme $g(x)=k\,e^{ax}$.

Posons $h(x)=g(x)\,e^{-ax}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=g'(x)\,e^{-ax}-ag(x)\,e^{-ax}\overset{g'=ag}{=}ag(x)\,e^{-ax}-ag(x)\,e^{-ax}=0$$

La fonction h est constante donc il existe $k\in\mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=k\ \Leftrightarrow\ g(x)\,e^{-ax}=k\ \Leftrightarrow\ g(x)=k\,e^{ax}$$

Si on impose $f(x_0)=y_0$, on a $k\,e^{ax_0}=y_0\ \Leftrightarrow\ k=y_0\,e^{-ax_0}$ donc f est unique.

3) Résolution d'une EDL1 du type $y\,'=a\,y+b$

Théorème : On donne l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 1 :
$\boldsymbol{(E): y\,'=a\,y+b}$ où y est une fonction continue et $a\in\mathbb{R}^*$
Les fonctions solutions de (E) sont : $\boldsymbol{y(x)=k\,e^{ax}-\frac{b}{a}}$ où $k=cte$
De plus il existe une unique solution vérifiant $f(x_0)=y_0$

Démonstration : Les fonctions de la forme $y(x)=k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$ sont bien solutions de l'équation car $y'(x)=ka\,e^{ax}=a\left(y(x)+\frac{b}{a}\right)=ay(x)+b$.

Réciproquement $y_0=-\frac{b}{a}$, est solution car $ay_0+b=-b+b=0=y_0'$.
Soit y une solution quelconque, comme y_0 est solution, on a le système suivant :

$$\begin{cases} y'=ay+b \\ y_0'=ay_0+b \end{cases}$$

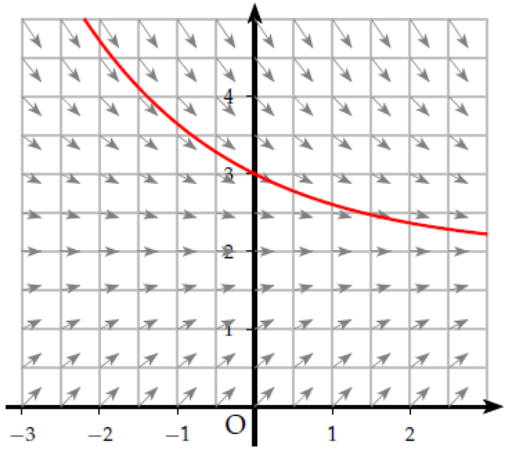
Par soustraction terme à terme : $y'-y_0'=ay-ay_0\ \Leftrightarrow\ (y-y_0)'=a\,(y-y_0)$

La fonction $y-y_0$ vérifie donc l'équation homogène donc :

$$(y-y_0)\,(x)=k\,e^{ax}\ \Leftrightarrow\ y(x)=k\,e^{ax}+y_0=k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$$

exemple : On donne l'EDL1 suivante $(E): y' = -0,5y+1$ telle que $f(0)=3$
alors les fonctions solutions de (E) sont de la forme $y(x)=k e^{-0,5x}+2$
si de plus $f(0)=3$ alors $k=1$ donc $f(x)=e^{-0,5x}+2$

On peut visualiser la fonction f dans le champ des solutions



4) Situations menant à une équation différentielle

Définition : La **loi de refroidissement de Newton** s'énonce ainsi :
« La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. »

- On pose $\theta(t)$ la température du corps en fonction du temps t écoulé en minutes.
- On appelle a le coefficient de proportionnalité liant la vitesse de refroidissement à la différence de température avec le milieu ambiant.
- On suppose que la température de l'air ambiant est θ_0

Étude d'un exemple : On donne $\theta_0=25\,°C$ et l'on sait que la température du corps passe de 100°C, à l'instant initial, à 70°C, au au bout de 15 minutes.

a) Écrire l'équation différentielle (linéaire d'ordre 1) que doit vérifier la θ en fonction de a et θ_0 ; On donnera le coefficient a à 10^{-3} près.

b) Déterminer les solutions $\theta(t)$ en fonction du temps t

c) Au bout de combien de temps la température du corps sera-t-elle de 40°C ? En donner une valeur arrondie à la seconde près.

d) Écrire un algorithme en *Python* permettant de trouver à la minute près au bout de combien de temps le corps ne refroidit plus (température à moins de 1°C de la température de l'air ambiant)

Solution :

1) La variation de température est donnée par la dérivée de θ.

D'après la loi de Newton, on a : $\theta' = a(\theta - \theta_0) \Leftrightarrow \theta' = a\,\theta - a\,\theta_0$.

L'équation différentielle est linéaire du premier ordre.

2) a) Les solutions de l'équation sont de la forme : $\theta(t) = k\,e^{at} + \theta_0,\ k \in \mathbb{R}$.

$\theta(0) = 100 \Leftrightarrow k + \theta_0 = 100 \Leftrightarrow k = 100 - \theta_0 = 75$

$\theta(15) = 70 \Leftrightarrow 75\,e^{15a} + 25 = 70 \Leftrightarrow e^{15a} = \dfrac{70-25}{75} = 0,6$

$\overset{\ln}{\Leftrightarrow}\ 15\,a = \ln 0,6 \Leftrightarrow a = \dfrac{\ln 0,6}{15} \approx -0,034$

Conclusion : $\theta(t) = 75\,e^{-0,034t} + 25$

b) $\theta(t) = 40 \Leftrightarrow 75\,e^{-0,034t} + 25 = 40 \Leftrightarrow e^{-0,034t} = \dfrac{40-25}{75} = 0,2$

$\overset{\ln}{\Leftrightarrow}\ -0,034t = \ln 0,2 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln 0,2}{0,034} \approx 47,34' \approx 47'\,20''$

Après 47 minutes et 20 secondes la température du corps est de 40°C.

c) On peut proposer l'algorithme suivant :

```python
from math import*
T=100
t=0
while abs(T-25)>=1:
    t+=1
    T=75*exp(-0.034*t)+25
print(t)
```

On obtient : $t = 127$

Au bout 2 h 07 le corps ne refroidit plus.

5) Résolution d'une EDL1 du type $y' = a\,y + g(x)$

Théorème : On donne l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 1 : $(E): y' = a\,y + g(x)$ où y est une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$
Les fonctions solutions de (E) sont : $y(x) = k\,e^{ax} + y_0(x)$ où $k = cte$

- **y_0** est une solution ***particulière*** de (E)
- on utilise les solution ***générales*** de l'équation homogène $(E_H): y' = a\,y$

Remarque : Dans la pratique, l'énoncé donnera la solution particulière $y0$ ou la méthode pour la déterminer.

Étude d'un exemple **:** Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = 1 - 6x$.

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution affine comme solution.

b) En déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Solution :

1) La solution particulière est un fonction affine donc : $y_0(x) = ax + b$.

y_0 doit vérifier (E) donc :

$y_0' - 2y_0 = 1 - 6x \iff a - 2(ax+b) = 1 - 6x \iff -2ax + a - 2b = -6x + 1$

Par identification : $\begin{cases} -2a = -6 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$ d'où $y_0(x) = 3x + 1$.

2) Soit y une solution de (E), comme y_0 est solution, on a le système suivant :

$$\begin{cases} y' - 2y = 1 - 6x \\ y_0' - 2y_0 = 1 - 6x \end{cases}$$

Par soustraction terme à terme :

$$y' - y_0' - 2(y - y_0) = 0 \iff (y - y_0)' = 2\,(y - y_0)$$

On obtient alors $(y - y_0)(x) = k\,e^{2x}$ donc $y(x) = k\,e^{2x} + 3x + 1$.

On vérifie facilement que ces solutions vérifie (E).

6) Résolution d'une équation différentielle non linéaire

[cette partie est Hors-Programme]

Théorème : **Principe de la méthode d'EULER** ; Soit f une fonction dérivable sur I, d'après l'approximation affine, pour un pas p :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; f(x+p) \simeq f(x) + p f'(x) \quad \textit{[approximation affine]}$$

Principe : Si l'on dispose d'une relation entre f et f' par une équation différentielle ainsi que d'une condition initiale, on peut, en appliquant l'approximation affine de façon itérative, déterminer de proche en proche des valeurs approchée de $f(x)$ sur I

<u>*Remarque*</u> : C'est par cette méthode que l'on a tracé, cf première, la fonction exponentielle définie par $y' = y$ et $y(0) = 1$.

Exemple : Soit l'équation différentielle : $\begin{cases} y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

C'est une équation différentielle linéaire du premier degré mais qui n'est pas à coefficients constant donc que l'on ne sait pas résoudre à notre niveau.

Comme l'on dispose d'une condition initiale, on peut alors utiliser une méthode numérique : la méthode d'Euler.

De l'équation différentielle, on a : $y' = 1 - 2xy$

D'où la formule de récurrence pour y :

$$y(x+p) = y(x) + py'(x) = y(x) + p\,\underbrace{[1 - 2xy(x)]}_{=y'} = y(x)(1 - 2px) + p$$

Pour le 1^er point $y(0+p) = y(0)(1-0) + p = p$ d'où $M_1(p\,,\,p)$

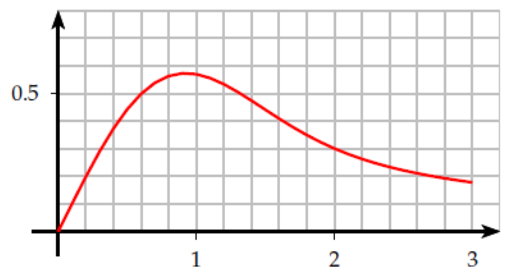
Pour le 2^e point $y(p+p) = \underbrace{y(p)}_{=p}(1-2p^2) + p = 2p - 2p^3$ d'où $M_2(2p\,;\,2p-2p^3)$

Et ainsi de suite.

Pour obtenir la courbe sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ avec un pas p, on automatise avec la fonction courbe(a,p) en Python :

⚠ Calculer la valeur de y avant d'incrémenter x

courbe(3 , 0.1) donne :




```
import matplotlib.pyplot as plt
def courbe(a,p):
    x=0 ; X=[x]
    y=0 ; Y=[y]
    borne=int(a/p)
    for i in range(borne):
        y=y*(1-2*p*x)+p
        x+=p
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y)
    plt.show()
    return X,Y
```

Remarque : Cette méthode est souvent utilisée en sciences expérimentales car elle ne demande pas de résoudre formellement l'équation différentielle.

À titre indicatif, la solution formelle est : $y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

B) Les équations différentielles linéaires du 2nd ordre

1) Les équations homogènes

Définition : On appelle équation différentielle linéaire homogène du second ordre toute équation de la forme : $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=0$ où $a,b,c=cte s$

Exemples : les équations différentielles sont des EDL2
(E_1) : $2y''+3y'+y=0$; (E_2) : $4y''+4y'+y=0$; (E_3) : $y''+y'+y=0$

Définition : On appelle équation caractéristique associée à l'différentielle linéaire homogène du second ordre l'équation : $ar^2+br+c=0$ d'inconnue $r\in\mathbb{R}$

Théorème : Soit l'EDL2 $(E):a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=0$ et son équation caractéristique associée $(E_r):ar^2+br+c=0$

- si $\Delta>0$ alors les solutions de (E_r) sont $r_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et les solutions de (E) sont $y(x)=A\,e^{r_1x}+B\,e^{r_2x}$
- si $\Delta=0$ alors la solution de (E_r) est $r_0=\dfrac{-b}{2a}$ et les solutions de (E) sont $y(x)=(Ax+B)e^{r_0x}$
- **[Maths Expertes]** si $\Delta<0$ alors les solutions de (E_r) sont $\alpha=\dfrac{-b-i.\sqrt{-\Delta}}{2a}\in\mathbb{C}$ et $\beta=\dfrac{-b+i.\sqrt{-\Delta}}{2a}\in\mathbb{C}$ et les solutions de (E) sont $y(x)=e^{\alpha x}[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)]$

Exemples : On se propose de résoudre les 3 équations différentielles :
(E_1) : $2y''+3y'+y=0$; (E_2) : $4y''+4y'+y=0$; (E_3) : $y''+y'+y=0$

Solutions:
Pour (E_1) : $2y''+3y'+y=0$ on $(E_r):2r^2+3r+1=0$
donc $\Delta=1>0$ donc $r_1=-1$ et $r_2=-0,5$
donc les solutions de (E_1) sont $y(x)=A\,e^{-x}+B\,e^{-0,5x}$

Pour (E_2) : $4y''+4y'+y=0$ on $(E_r):4r^2+4r+1=0$
donc $\Delta=0$ donc $r_0=-0,5$
donc les solutions de (E_2) sont $y(x)=(A\,x+B)e^{-0,5x}$

Pour (E_3) : $y''+y'+y=0$ on $(E_r):r^2+r+1=0$
donc $\Delta=-3<0$ donc $\alpha=\dfrac{-1-i.\sqrt{3}}{2}$ et $\beta=\dfrac{-1+i.\sqrt{3}}{2}$
donc les solutions de (E_3) sont $y(x)=e^{-0,5x}[A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)]$

2) Les équations avec 2nd membre

Théorème : On appelle équation différentielle linéaire du second ordre avec 2nd membre toute équation de la forme : $(E):a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=g(x)$
Les fonctions solutions de (E) sont : $\boldsymbol{y(x)=y_H(x)+y_0(x)}$ où $k=cte$

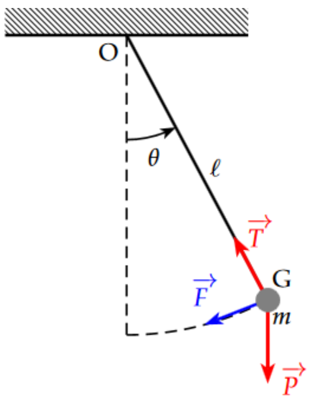
- **y_0** est une solution ***particulière*** de (E)
- $\boldsymbol{y_H}$ sont les solution ***générales*** de l'équation homogène $(\boldsymbol{E_H})$

Exemple : Pour (E) : $2y''+3y'+y=-1$ on obtient les solutions sous la forme $y(x)=A\,e^{-x}+B\,e^{-0,5x}-1$ car $y'(x)=y''(x)=0$

<u>Remarque</u> : dans le cas plus général, la nature de y_0 est identique à celle de *g*

3) Applications des EDL2 : isochronisme des petites oscillations

Soit un pendule simple, modélisé par un objet G de masse ponctuel *m* accroché à un fil de masse négligeable et de longueur ℓ dont on <u>néglige les forces de frottements</u> ; À l'équilibre le fil est vertical. On repère la position du point G par l'angle θ, qui est fonction du temps. On écarte le point G de sa position d'équilibre d'un petit angle θ_0 ; La somme des forces $\vec{F}$ est tangente à la trajectoire du point G et correspond à la projection du poids $\vec{P}$ sur cette tangente. D'après le principe fondamental de la dynamique, on a
$\vec{F}=m\vec{a}$ donc $\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a}$ avec $\vec{a}=l\theta''.\vec{i}+l\theta'^2.\vec{j}$



donc par projection sur l'axe de $\vec{F}$:
$0-mg\sin(\theta)=ml\theta''+0$ donc $\theta''=\dfrac{-g}{l}\sin(\theta)$ or
θ est petit donc $\sin(\theta)\simeq\theta$ on en déduit l'EDL2 :
$(E):\theta''+\dfrac{g}{l}\theta=0$ avec $\theta(0)=\theta_0$ et $\theta'(0)=0$
donc $\theta(t)=\theta_0.\sin(\omega t+\phi)$ avec $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ et $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ car $\theta'(0)=0$ d'où les solutions générales des oscillations :
$\theta(t)=\theta_0.\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$ donc $\boldsymbol{\theta(t)=\theta_0.\cos(\omega t)}$