LIMITES ET CONTINUITÉ

I. Limite d'une fonction à l'infini

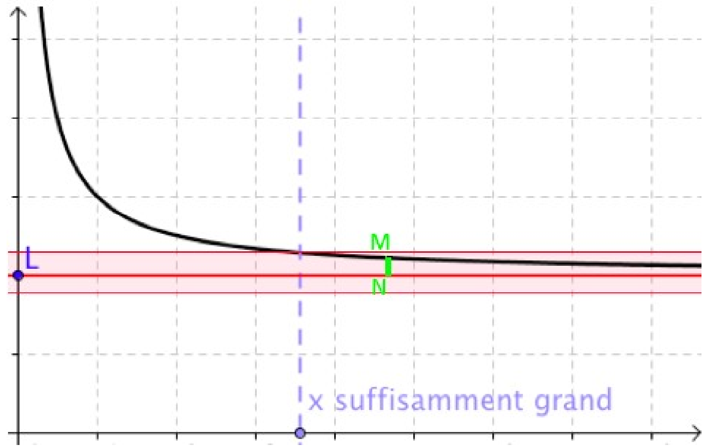
1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x)=2+\frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Définitions : - La droite d'équation $y=L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

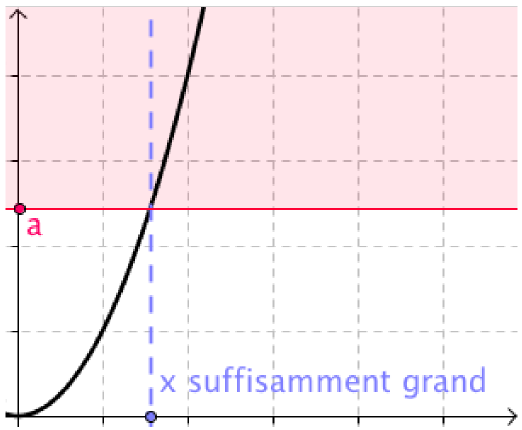
– La droite d'équation $y=L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

Remarque :
Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote. La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :
La fonction définie par $f(x)=x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

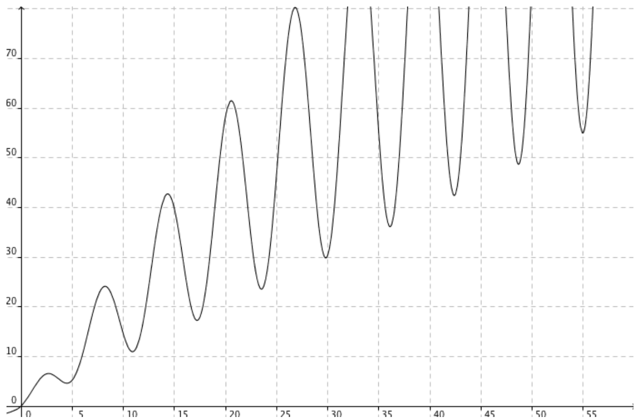


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

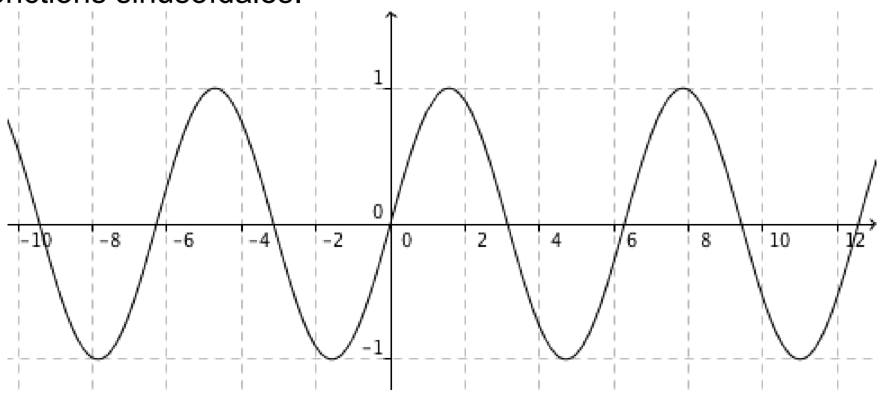
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$

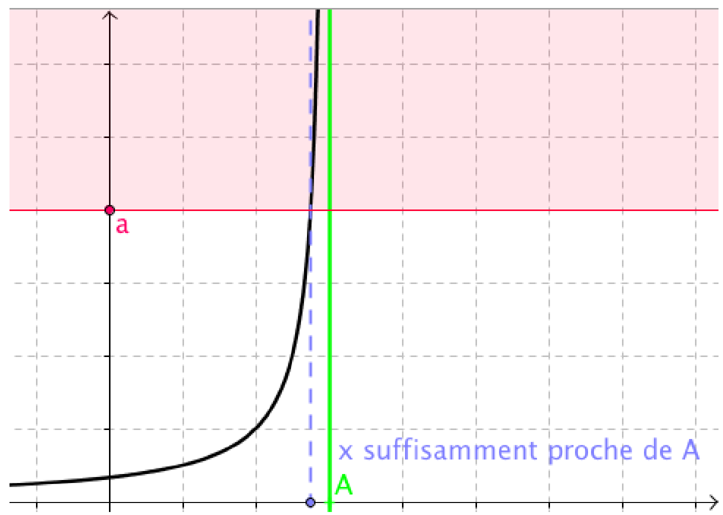
II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A ; En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A.



Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x\to A} f(x)=+\infty$

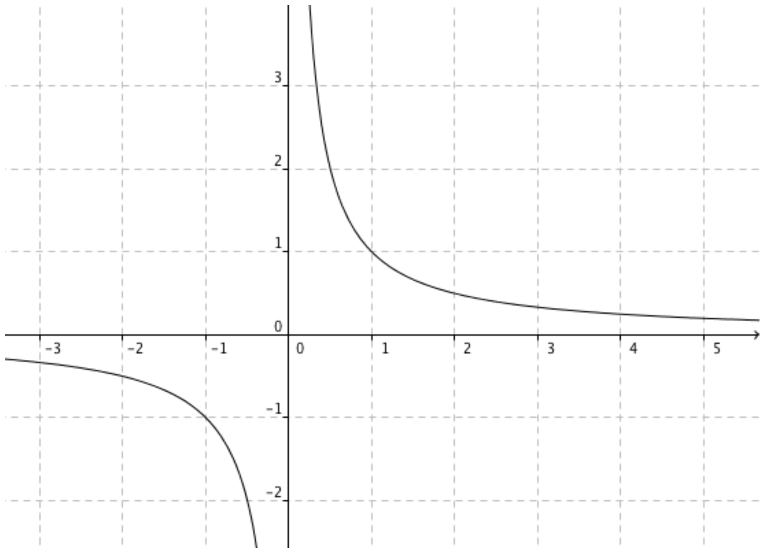
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x\to A} f(x)=-\infty$

Définition : La droite d'équation $x=A$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x\to A} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to A} f(x)=-\infty$.

Remarque : Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$.
- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$.



On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :

Vidéo https://youtu.be/9nEJCL3s2eU

III. Opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+g(x)\right)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	$L>0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)g(x)\right)=$	$L\,L'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L' non nul	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+x^2)=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)=-\infty$

Remarque :
Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty", "0\times\infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Vidéo https://youtu.be/4NQbGdXThrk
Vidéo https://youtu.be/8tAVa4itblc
Vidéo https://youtu.be/pmWPfsQaRWI

Calculer :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-6x+1\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}$

1) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $-\infty$ +($+\infty$)+($-\infty$)"

Levons l'indétermination :

$$-3x^3+2x^2-6x+1=x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$.

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-3$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, on a par produit de limites

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-6x+1\right)=-\infty$.

2) En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$.

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\frac{5}{x^2}\right)=6$.

Donc comme quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{1}{3}$.

3) Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1}=\frac{x^2}{x}\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)=4$.

Donc comme quotient de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=\frac{3}{4}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, donc comme produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=-\infty$

Et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}=-\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Vidéo https://youtu.be/n3XapvUfXJQ
Vidéo https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

1) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty-\infty$ "

Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

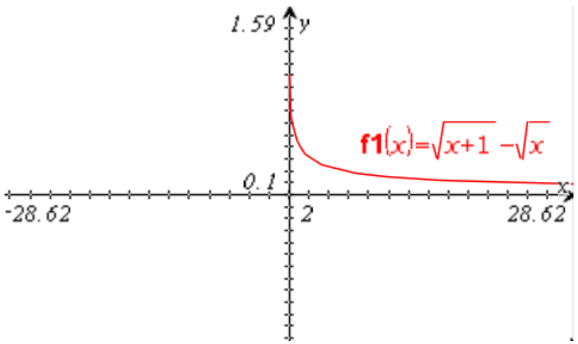
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$.

Et donc par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$.
On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.



2) $\lim\limits_{x\to5}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=\sqrt{5-1}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to5}(x-5)=5-5=0$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\dfrac{0}{0}$ ".

Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

Or $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-1}=\sqrt{5-1}=2$ donc par somme de limites

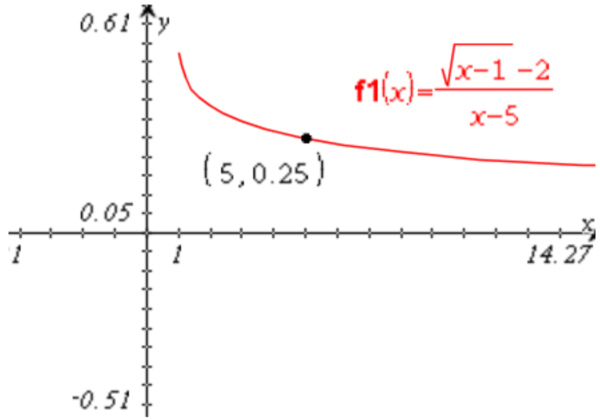
$\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-1}+2=2+2=4$.

Donc par quotient de limites, on a $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Et donc $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\dfrac{1}{4}$.

En traçant à l'aide de la calculatrice la fonction $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, il est possible de vérifier la pertinence de la solution trouvée en plaçant un point sur la courbe.

Attention cependant, la calculatrice ne fait pas apparaître que la fonction f n'est pas définie en 5.

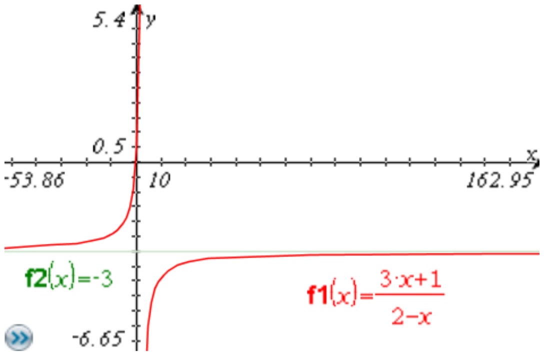


Méthode : Déterminer une asymptote

Vidéo https://youtu.be/0LDGK-QkL80
Vidéo https://youtu.be/pXDhrx-nMto

1) Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$.

Démontrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.



Il faut donc démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{2-x}=-3$:

$$\frac{3x+1}{2-x}=\frac{x}{x}\times\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=-1$.

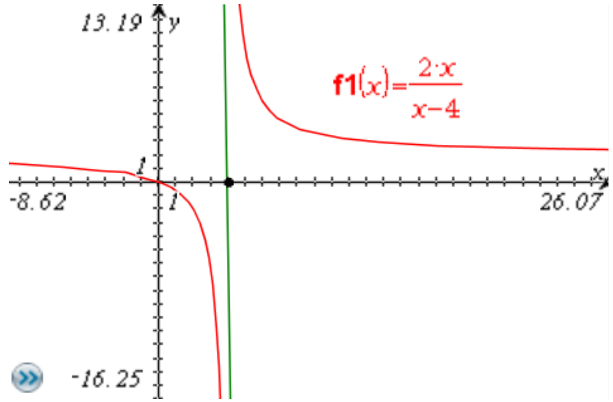
Et donc par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-3$.

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2x}{x-4}$.

Démontrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.

Il faut donc démontrer que la limite la fonction g possède une limite infinie en 4.



- $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}(x-4)=0$ et $\lim\limits_{x\to4}2x=8$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}\dfrac{2x}{x-4}=-\infty$ car $x-4<0$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(x-4)=0$ et $\lim\limits_{x\to4}2x=8$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{2x}{x-4}=+\infty$ car $x-4>0$.

On en déduit que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.

IV. Limite d'une fonction composée

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x}}$.

On souhaite calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On considère les fonctions u et v définie par : $u(x)=2-\frac{1}{x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

Alors : $f(x)=v(u(x))$. On dit alors que f est la composée de la fonction u par la fonction v.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=2$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{u(x)}=\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$.

Théorème :
A, B, C peuvent désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to A}u(x)=B$ et $\lim\limits_{x\to B}v(x)=C$ alors $\lim\limits_{x\to A}v(u(x))=C$.

- Admis -

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/DNU1M3li76k

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}$

- On commence par calculer la limite de la fonction $x\mapsto\frac{4x-1}{2x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{4x-1}{2x+3}=\frac{x}{x}\times\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)=4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{4}{2}=2$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x+3}=2$.

- Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$.

- Comme limite de fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}=\sqrt{2}$.

V. Limites et comparaisons

1) Théorème de comparaison

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x>a$, on a $f(x)\le g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ (figure 1)
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (figure 2)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ (figure 3)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

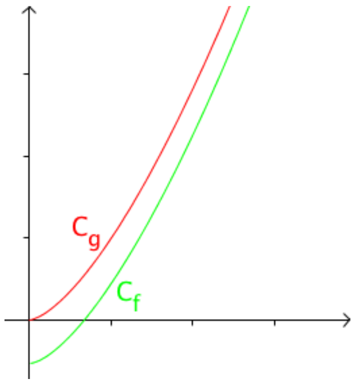


Figure 1

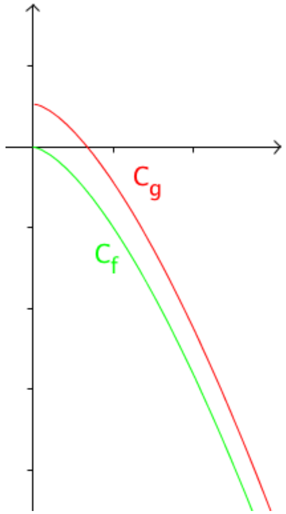


Figure 2

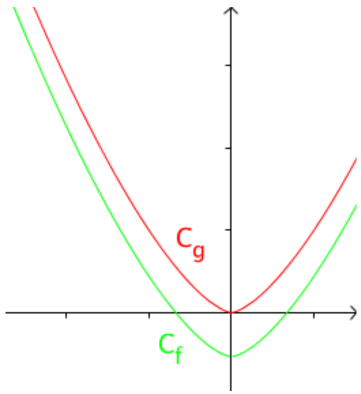


Figure 3

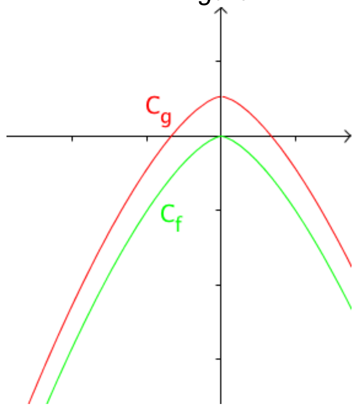


Figure 4

<u>Démonstration dans le cas de la figure 1 :</u>

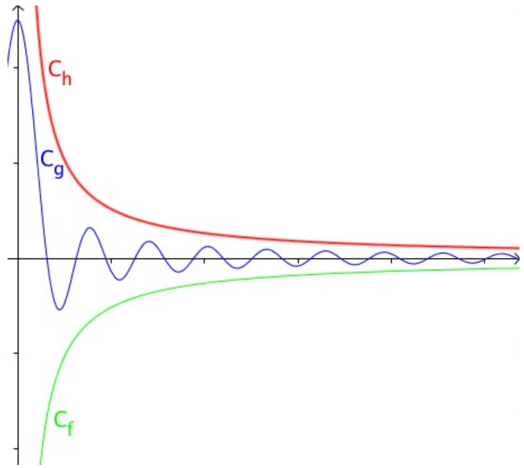
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m;+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) \geq m$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.

Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) \geq m$.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) <u>Théorème d'encadrement</u>

<u>Théorème des gendarmes :</u> Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

<u>Remarque :</u> On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

<u>Méthode :</u> Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y
Vidéo https://youtu.be/Eo1jvPphja0

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2+1}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
Pour tout x, $-1 \le \sin x$ donc $x-1 \le x+\sin x$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ donc d'après le théorème de comparaison,
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
Pour tout x, $-1 \le \cos x \le 1$ donc $-x \le x\cos x \le x$ car $x > 0$.

Et donc $-\dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{x\cos x}{x^2+1} \le \dfrac{x}{x^2+1}$

Ou encore $-\dfrac{x}{x^2} \le -\dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{x\cos x}{x^2+1} \le \dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{x}{x^2}$

Soit $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{x\cos x}{x^2+1} \le \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}=0$.

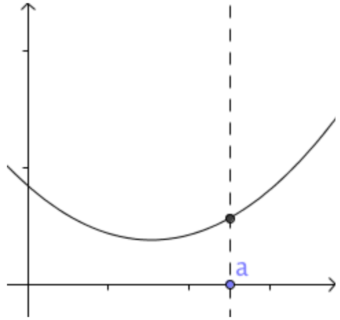
VI. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

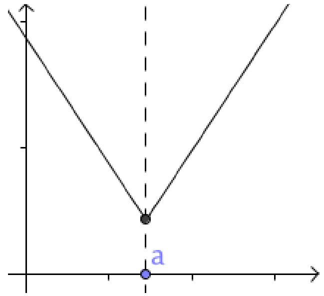
1) Continuité

Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o

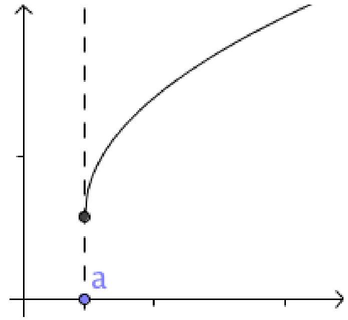
Exemples et contre-exemples :



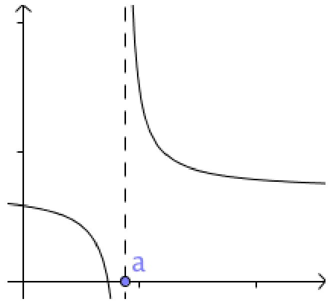
f est continue en a



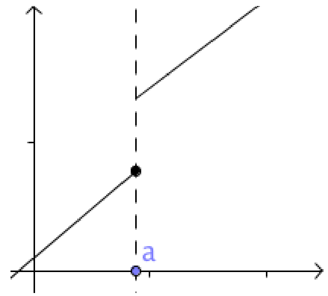
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Rque : La courbe représentative d'une fonction continue se trace « sans lever le crayon ».

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel *a*.
- f est continue en *a* si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemples :
- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ ($n \in IN$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h(x)=\sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $k(x)=\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

<u>Remarque :</u>
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

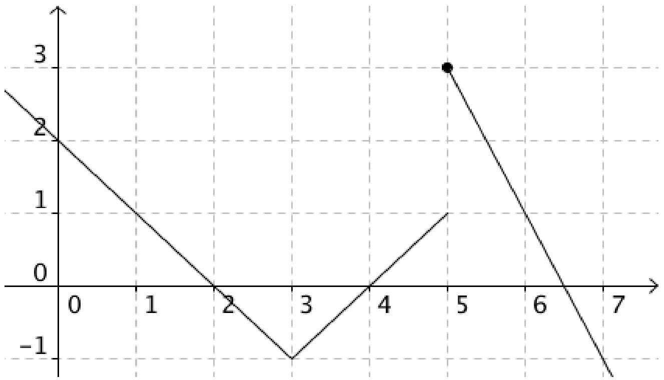
<u>Théorème :</u> Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

- Admis -

<u>Méthode :</u> Etudier la continuité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/03WMLyc7rLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x<3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \le x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \ge 5 \end{cases}$.



La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $\left]-\infty;3\right[$, sur $\left[3;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.

Etudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (-x+2) = -3+2 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-4) = 3-4 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = f(3)$ donc la fonction f est continue en 3.

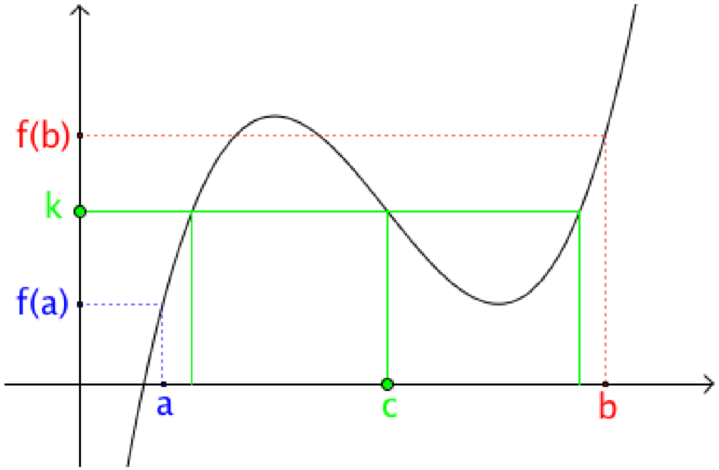
- $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} (x-4) = 5-4 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} (-2x+13) = -2\times 5+13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas.
On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
La fonction f n'est donc pas continue en 5.
La fonction f est continue sur $\left]-\infty;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.

2) <u>Valeurs intermédiaires</u>

<u>Théorème des valeurs intermédiaires :</u>
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b].
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



- Admis -

<u>Conséquence :</u>
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle [a ; b].

Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=0$.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

Vidéo https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y
Vidéo https://youtu.be/UmGQf7gkvLg

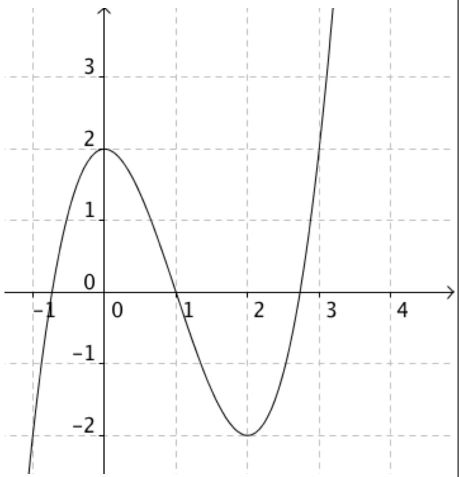
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

1) - Existence : $f(2)=2^3-3\times 2^2+2=-2$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\times\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=+\infty$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$ et elle change de signe.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c)=0$.

- Unicité : $f\,'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
Donc, pour tout x de $\left]2;+\infty\right[$, $f\,'(x)>0$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]2;+\infty\right[$.



- On en déduit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c)=0$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk
Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2{,}73<c<2{,}74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie