La fonction logarithme népérien

Table des matières

Avant propos

La création de la fonction logarithme népérien est, à l'origine, antérieure à la fonction exponentielle bien que dans notre progression elle suive l'étude de la fonction exponentielle. La fonction logarithme a été créée par un drapier écossais du XVII^e siècle. Ce drapier, Néper, cherche une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers. Il crée alors une fonction qui transforme le produit en somme. C'est à dire que $f(ab) = f(a) + f(b)$. Il a ensuite passé trente ans de sa vie à créer une table dite « de logarithmes » qui permettait d'effectuer les conversions nécessaires. C'est cette fonction, qui fait écho à la fonction exponentielle, qui est l'objet de ce chapitre.

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition

Définition 1 : On appelle fonction logarithme népérien notée ln, la fonction définie de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln x$$

On dit que la fonction ln est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Remarque : Cette fonction existe bien car la fonction exponentielle est une fonction continue, strictement croissante à valeur dans $]0;+\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $x = e^y$, d'inconue y avec $x \in]0;+\infty[$, admet une unique solution $\ln x$.

Conséquence On a les relations suivantes : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ ainsi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln e^x = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0;+\infty[, \quad e^{\ln x} = x$$

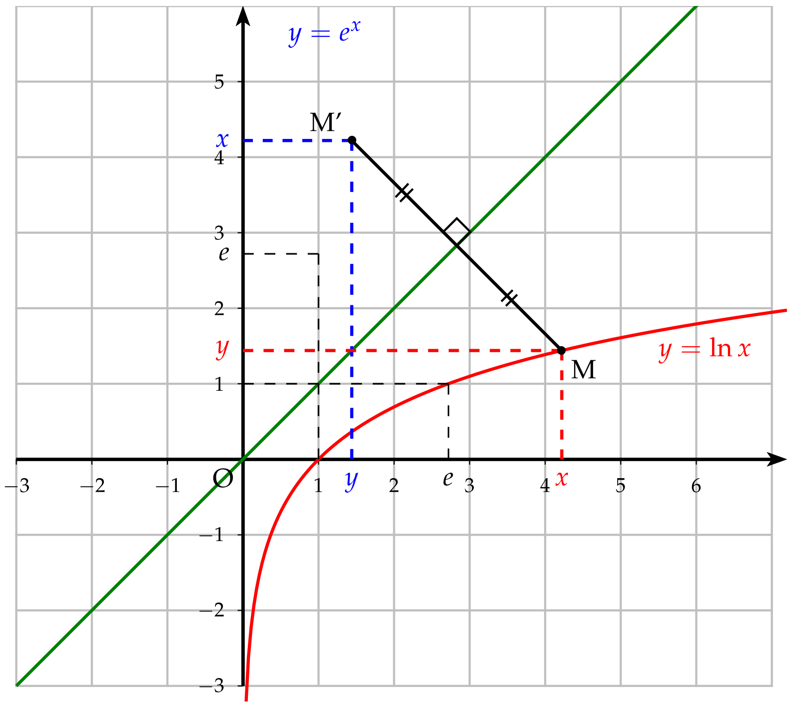
⚠ Faire attention aux ensembles de définition.

1.2 Représentation

Théorème 1 : Les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration : On note $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ les courbes respectives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point de $\mathscr{C}_{\ln}$ avec $x\in]0;+\infty[$ et $y\in\mathbb{R}$, donc $y=\ln x$. On a alors $x=e^y$, donc le point $\mathrm{M}'(y,x)$ est un point de $\mathscr{C}_{\exp}$. Les courbes $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ sont donc symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y=x$.



1.3 Variation de la fonction logarithme

Théorème 2 : La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Démonstration : Soit deux réels a et b strictement positifs et $a<b$ alors on peut écrire :

$$a<b \quad\Leftrightarrow\quad e^{\ln a}<e^{\ln b}$$

comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a : $\ln a<\ln b$

La fonction logarithme est donc strictement croissante.

Propriété 1 : Soit a et b deux réels strictement positifs

- $\ln a=\ln b \quad\Leftrightarrow\quad a=b$
- $\ln a=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=1$
- $\ln a<\ln b \quad\Leftrightarrow\quad a<b$
- $\ln a<0 \quad\Leftrightarrow\quad 0<a<1$
- $\ln a>0 \quad\Leftrightarrow\quad a>1$

Remarque : Ces propriétés permettent de résoudre des équations et des inéquations. On veillera à mettre l'équation ou l'inéquation sous la forme ci-dessus et à déterminer les conditions de validité de l'équation ou de l'inéquation.

Exemples :

- Résoudre $\ln(2-2x) = 1$.

  On met l'équation sous la forme : $\ln(2-2x) = \ln e$

  l'équation est valide si, et seulement si, $2-2x > 0$ c'est à dire $x < 1$

  On a alors : $x < 1$ et $2-2x = e$ soit $x = \dfrac{2-e}{2}$

  On a $\dfrac{2-e}{2} < 1$ car $\dfrac{2-e}{2} \simeq -0,36$.

  On conclut alors : $S = \left\{\dfrac{2-e}{2}\right\}$

- Résoudre $\ln(2x+1) < -1$

  On met l'inéquation sous la forme : $\ln(2x+1) < \ln e^{-1}$

  L'inéquation est valide si, et seulement si, $2x+1 > 0$ soit $x > -\dfrac{1}{2}$

  On a alors : $x > -\dfrac{1}{2}$ et $2x+1 < e^{-1}$ soit $x < \dfrac{e^{-1}-1}{2}$

  On a : $\dfrac{e^{-1}-1}{2} = \dfrac{1-e}{2e} \simeq -0,32$ donc $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1-e}{2e}$

  On conclut par : $S = \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1-e}{2e}\right[$

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

2.1 Relation fonctionnelle

Théorème 3 : Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Démonstration : D'après les propriétés de l'exponentielle, on a :

$$e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

Or $e^{\ln ab} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$

On conclut donc que $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Remarque : C'est cette propriété qui est à l'origine de la fonction logarithme.

Exemple : $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$

2.2 Quotient, inverse, puissance et racine carrée

Théorème 4 : Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

1) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

2) $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$

3) $\ln a^n = n \ln a$ avec $n \in \mathbb{N}$

4) $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

Démonstration :

- Pour démontrer la propriété 1, on revient aux propriétés de l'exponentielle.

  On a $e^{\ln \frac{a}{b}} = \dfrac{a}{b}$ et $e^{\ln a - \ln b} = \dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \dfrac{a}{b}$ d'où la propriété :
  $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- Pour la deuxième propriété, on fait $a = 1$
- La troisième propriété se démontre par récurrence à l'aide du produit.
- Pour la dernière propriété : on a $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ donc d'après la propriété du produit, on a :

  $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$ d'où $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

✏ ✏

Exemples : Voici 3 exemples d'utilisation de ces propriétés.

- Exprimer $\ln 50$ avec $\ln 2$ et $\ln 5$ et $\ln \sqrt{12}$ avec $\ln 2$ et $\ln 3$

  On a $50 = 2 \times 5^2$ donc $\ln 50 = \ln 2 + 2 \ln 5$

  On a $12 = 2^2 \times 3$ donc $\ln \sqrt{12} = \dfrac{1}{2}(2 \ln 2 + \ln 3) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln 3$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

- Déterminer l'entier n tel que $2^n > 10\,000$

  On a donc : $\ln 2^n > \ln 10^4$ soit $n \ln 2 > 4 \ln 10$

  On obtient alors : $n > \dfrac{4 \ln 10}{\ln 2}$ or $\dfrac{4 \ln 10}{\ln 2} \simeq 13.29$ donc $n \geqslant 14$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

- Résoudre l'équation : $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \dfrac{1}{2} \ln x$

  l'équation existe si $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 6 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x < 6 \\ x > 0 \end{cases}$

  On en déduit l'ensemble de définition : $D_f = \left] \dfrac{3}{2} \,;\, 6 \right[$

  On a alors $\dfrac{1}{2}[\ln(2x - 3) + \ln x] = \ln(6 - x)$

  soit $\ln x(2x - 3) = 2 \ln(6 - x)$

  L'équation revient à :

  $$x \in D_f \quad \text{et} \quad \begin{aligned} x(2x - 3) &= (6 - x)^2 \\ 2x^2 - 3x &= x^2 - 12x + 36 \\ x^2 + 9x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

  On calcule : $\Delta = 81 + 144 = 225 = 15^2$ on trouve alors deux solutions

  $$x' = \frac{-9 + 15}{2} = 3 \in D_f \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-9 - 15}{2} = -12 \notin D_f$$

  on conclut par : $S = \{3\}$

3 Étude de la fonction logarithme népérien

3.1 Dérivée

Théorème 5 : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Démonstration : On admet que la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$

On revient à la définition de la dérivée, c'est à dire on cherche les $a \in]0;+\infty[$ pour lesquels la limite suivante est finie :

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$$

Pour déterminer cette limite, on fait un changement de variable. On pose alors $X = \ln x$ et $A = \ln a$. On a alors $x = e^X$ et $a = e^A$ et si $x \to a$, comme la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$, alors $X \to \ln a$. La limite devient alors :

$$\lim_{X \to \ln a} \frac{X - A}{e^X - e^A}$$

Or la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la dérivée en $\ln a$ est $e^{\ln a}$:

$$\lim_{X \to \ln a} \frac{e^X - e^A}{X - A} = e^{\ln a} = a$$

Cette limite est strictement positive pour $a \in]0;+\infty[$. On en déduit que la limite suivante existe pour tout $a \in]0;+\infty[$ et :

$$\lim_{X \to \ln a} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \frac{1}{a}$$

Conclusion : la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

3.2 Limite en 0 et en l'infini

Théorème 6 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Démonstration :

- Pour montrer la limite en $+\infty$, on revient à la définition :

  Pour tout $M > 0$, si $\ln x > M$ alors, comme la fonction exp est croissante, $x > e^M$.

  Il existe donc un réel $A = e^M$ tel que si $x > A$ alors $\ln x > M$.

  Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

- Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable. On pose $X = \dfrac{1}{x}$.
  Donc si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$. On a alors :

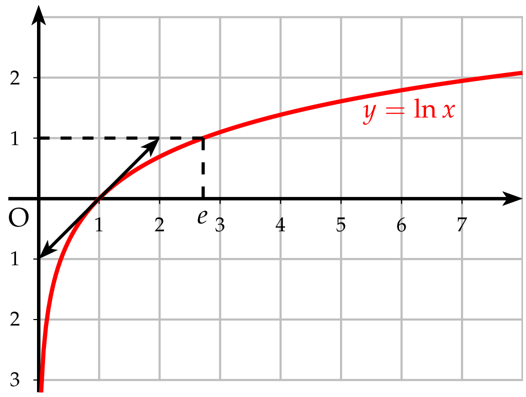
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} - \ln X = -\infty$$

3.3 Tableau de variation et courbe

On peut résumer les variations et les limites de la fonction ln, dans un tableau de variation :

x	0		1		e		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖			$+$			
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a alors la courbe représentative ci-contre $\rightarrow$



3.4 Des limites de référence

Théorème 7 : On a : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration : Cela découle de la dérivée de ln en $x = 1$, en effet, on a :

$$\left.\begin{array}{l} (\ln)'(1) = \dfrac{1}{1} = 1 \\ (\ln)'(1) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array}\right\} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Théorème 8 : Croissance comparée

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Démonstration :

- Pour la premère limite, on fait un changement de variable.
  On pose : $X = \ln x$, on a alors $x = e^X$. On a alors :

$$x \to +\infty \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

Notre limite devient alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

- Pour la deuxième limite, on fait le changement de variable suivant : $X = \dfrac{1}{x}$. On a alors :

$$x \to 0^+ \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

La deuxième limite devient alors :

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

Remarque : On peut dire que : « x l'emporte sur $\ln x$ en $+\infty$ ».

Exemple : Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$

C'est une limite indéterminée, car de la forme « $+\infty - \infty$ ». On met alors x en facteur.

$$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme et produit, on a :} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x = +\infty\end{array}$$

3.5 Dérivée de la fonction $\ln u$

Théorème 9 : Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur D. La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur D et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Démonstration : La démonstration est la conséquence directe de la dérivée de la composition de fonction.

Remarque : Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation car comme $u > 0$, $(\ln u)'$ a le même signe que u'.

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

On pose la fonction $u(x) = 1 + x^2$. u est manifestement strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

4 Applications

4.1 Approximation de e

On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

- Montrer que la suite (u_n) converge vers e. On pourra poser $v_n = \ln u_n$.
- Faire un programme permettant de déterminer n pour une valeur approchée de e à 10^{-3}. Que penser de la vitesse de convergence de la suite ?

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

- Calculons v_n : $v_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

  La fonction f associée à la suite (v_n) définie sur $]0;+\infty[$ est : $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

  Sous cette forme, la limite de f en $+\infty$ est une forme indéterminée. On effectue un changement de variable pour lever l'indétermination : $X = \dfrac{1}{x}$, on a ainsi :

  $$\text{si} \quad x \to +\infty \quad \text{alors} \quad X \to 0^+$$

  On peut ainsi calculer la limite :

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

  On en déduit alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$

  On revient alors à la suite (u_n) : $v_n = \ln u_n$ donc $u_n = e^{v_n}$, on en déduit que (u_n) est convergente et :

  $$\lim_{x\to+\infty} u_n = e$$

- On fait une boucle avec un "tant que" pour déterminer l'indice n pour avoir la précision demandée.

  On trouve alors :
  N=1 359 et $U \simeq 2,717$

  La vitesse de convergence est donc très lente. Cette suite n'est donc pas judicieuse pour trouver une approximation de e

Variables : I : entier U : réel
Entrées et initialisation
  $2 \to U$
  $1 \to I$
Traitement
  tant que $|U - e| > 10^{-3}$
  faire
    $I + 1 \to I$
    $\left(1+\dfrac{1}{I}\right)^I \to U$
  fin
Sorties : Afficher : I, U

4.2 Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 4x - 4\ln x$

1) Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$

2) Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) En déduire, en se justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4) À l'aide d'une calculatrice donner la valeur approchée par défaut à 10^{-3} près des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1) a) La limite en 0 ne pose pas de problème :

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 - 4x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} -4 \ln x = +\infty$$

Par somme, on a : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

b) La limite en $+\infty$ est indéterminée du type $+\infty - \infty$. On change alors la forme de $f(x)$

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right)$$

or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Par produit et somme, on a donc : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) On calcule la dérivée :

$$f'(x) = 2x - 4 - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4x - 4}{x} = \frac{2(x^2 - 2x - 2)}{x}$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 2 = 0 \quad$ avec $x > 0$

On calcule $\Delta = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$, on obtient comme racines :

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1 - \sqrt{3} < 0 \quad \text{non retenu}$$

signe de $f(x)$ = signe de $(x^2 - 2x - 2)$ avec $x > 0$

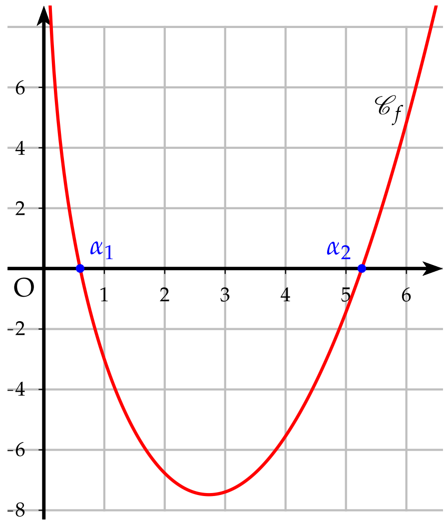
on obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0	α_1	$1+\sqrt{3}$	α_2	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0 $\searrow$	$\simeq -7,48$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

3) D'après le tableau de variation, sur les intervalles $\mathrm{I}_1 =]0; 1 + \sqrt{3}]$ et $\mathrm{I}_2 = [1 + \sqrt{3}; +\infty[$ la fonction f est continue, strictement monotone et change de signe donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α_1 et α_2 (une dans chaque intervalle)
4) À l'aide du programme sur les valeurs intermédiaires, on obtient les valeurs approchées suivantes :

$$0,600 < \alpha_1 < 0,601 \qquad \text{et} \qquad 5,261 < \alpha_2 < 5,262$$

À titre indicatif, voici la courbe de la fonction f.



5 Le logarithme décimal

5.1 Définition

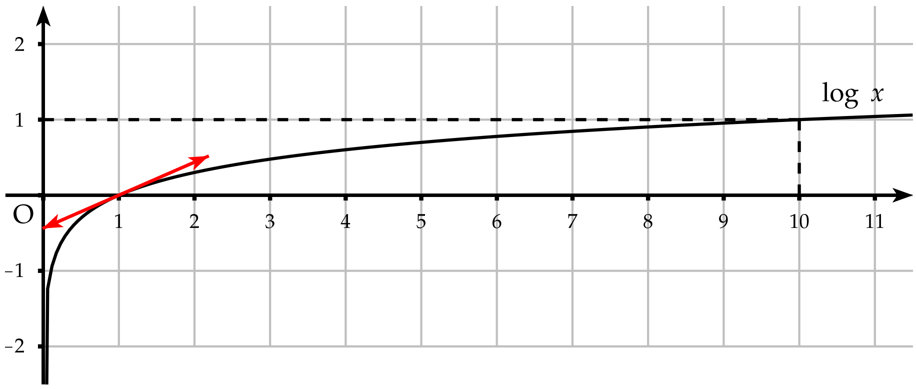
Définition 2 : On appelle logarithme décimal, la fonction, notée log, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarque :

- On a : $\log x = \dfrac{1}{\ln 10} \times \ln x$. Comme $\dfrac{1}{\ln 10} > 0$, la fonction log a les mêmes variations et les mêmes limites que la fonction ln.
- La fonction log transforme les produits en sommes
- $y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^y$

  ainsi : $\log 10^1 = 1$, $\log 10^2 = 2$, ..., $\log 10^n = n$
- On a la représentation ci-dessous : $\log' x = \dfrac{1}{x \ln 10}$



5.2 Applications

5.2.1 Nombre de chiffres dans l'écriture décimale

Un nombre $N \geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10.

Soit alors : $10^p \leqslant N < 10^{p+1}$

Dans ce cas, N possède $p+1$ chiffres.

Comme la fonction log est une fonction croissante, on a :

$$\log 10^p \leqslant \log N < \log 10^{p+1}$$
$$p \leqslant \log N < p+1$$

On a donc : $E(\log N) = p$ où E est la fonction partie entière

Conclusion : le nombre de chiffres de N est donc : $E(\log N) + 1$.

Application : quel est le nombre de chiffres de 2011^{2012} ?

$$\log 2011^{2012} = 2012 \log 2011 \simeq 6\,646{,}465$$

On en déduit alors que 2011^{2012} possède 6 647 chiffres !

5.2.2 En chimie

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH : $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$

- Lorsque la concentration en $[\text{H}^+]$ est multipliée par 10, le pH diminue de 1. En effet :

$$-\log\left(10 \times [\text{H}^+]\right) = -(\log 10 + \log[\text{H}^+]) = -1 - \log[\text{H}^+] = \text{pH} - 1$$

- Si une étiquette d'une eau minérale d'eau gazeuse indique $\text{pH} = 6,3$, on a :

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \quad \text{donc} \quad [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

$$[\text{H}^+] = 10^{-6{,}3} \simeq 5 \times 10^{-7} \text{ mol/l}$$

5.2.3 En acoustique

Le niveau sonore L (en décibels) d'un son d'intensité I est donnée par :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

où $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2} correspond au seuil d'audibilité en dessous duquel aucun son n'est perçu.

Par exemple le niveau sonore L d'une conversation normale qui correspond à $I = 10^5 I_0$ est de :

$$L = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels}$$

Remarque : En sismologie, un même type d'échelle est utilisé. La magnitude M d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par :

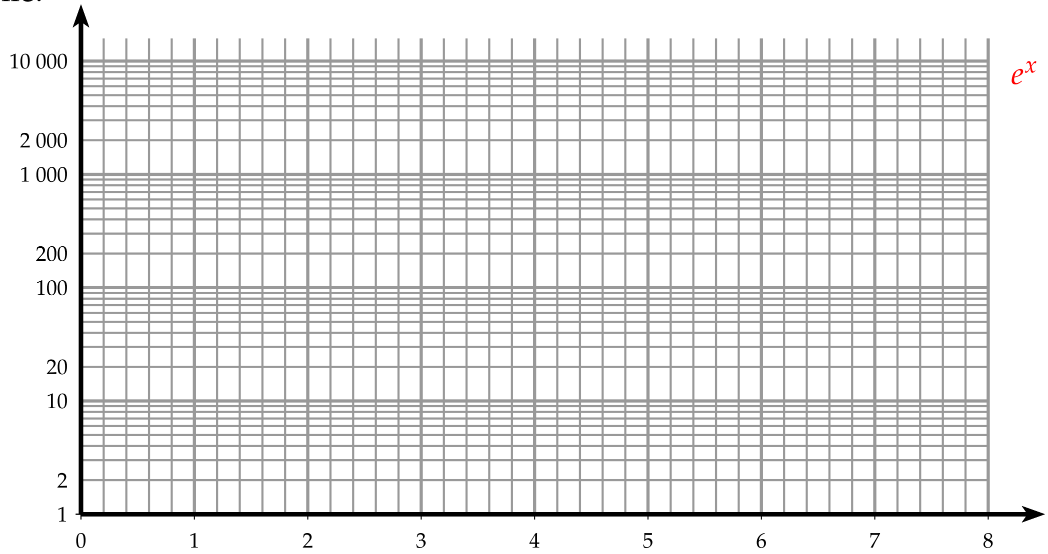
$$M = \log \frac{I}{I_0}$$

Par exemple, la magnitude des séismes suivant :

- Fukushima (2011) $I = 6,31 \times 10^8 I_0$ correspond à $M = 8 + \log 6,31 \simeq 8,8$
- Californie (1992) $I = 3,16 \times 10^7 I_0$ correspond à $M = 7 + \log 3,16 \simeq 7,5$

5.2.4 Papier semi-logarithmique et logarithmique

- Le papier **semi-logarithmique** utilise une échelle linéaire sur l'axe des abscisses et une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées. Sur l'axe des ordonnées 10 correspond à 1 unité, 100 à 2 unités, 1 000 à 3 unités, ...
  Sur le papier semi-logarithmique ci-dessous, on a tracé la fonction exponentielle.



- Le papier **logarithmique** utilise une échelle logarithmique sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnée.
  Sur le papier logarithmique ci-dessous, on a tracé quelques fonctions du type x^n ou $\sqrt[n]{x}$.