SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 3$, $u_1 = 8$, $u_2 = 13$, $u_3 = 18$.

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3. La suite est donc définie par : $u_{n+1}=u_n+5$ et $u_0=3$.

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1}=u_n+r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

Vidéo https://youtu.be/YCokWYcBBOk

1) La suite (u_n) définie par : $u_n=7-9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite (v_n) définie par : $v_n=n^2+3$ est-elle arithmétique ?

1) $u_{n+1}-u_n=7-9(n+1)-7+9n=7-9n-9-7+9n=-9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –9. (u_n) est une suite arithmétique de raison –9.

2) $v_{n+1}-v_n=(n+1)^2+3-n^2-3=n^2+2n+1+3-n^2-3=2n+1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=u_0+nr$

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/Jn4_xM_ZJD0

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1}=u_n+r$.

En calculant les premiers termes : $u_1=u_0+r$, $u_2=u_1+r$, $u_3=u_2+r$
… $u_n=u_{n-1}+r$ En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient : $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+n\times r$
Soit, en retranchant aux 2 membres les termes identiques : $u_n=u_0+nr$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/iEuoMgBbIz4

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5=7$ et $u_9=19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n=u_0+nr$
Ainsi $u_5=u_0+5r=7$ et $u_9=u_0+9r=19$.
En soustrayant membre à membre, on obtient : $u_0+5r-u_0-9r=7-19$
Soit : $5r-9r=7-19$ donc $r=3$.

Comme $u_0+5r=7$, on a : $u_0+5\times 3=7$ et donc : $u_0=-8$.

2) $u_n=u_0+nr$ soit $u_n=-8+n\times 3$ ou encore $u_n=3n-8$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1}-u_n=u_n+r-u_n=r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

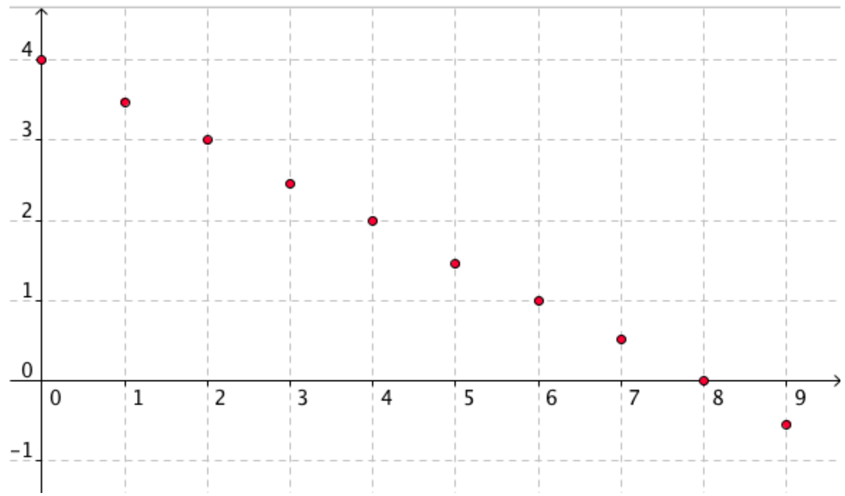
Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

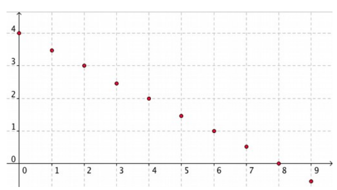
La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n=5-4n$ est décroissante car de raison négative et égale à –4.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple : On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0.	**Exemple :** $r=-0{,}5$ et $u_0=4$
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=u_n-0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à –0,5.
Propriété	$u_n=u_0+nr$	$u_n=4-0{,}5n$
Variations	Si r > 0 : (u_n) est croissante. Si r < 0 : (u_n) est décroissante.	$r=-0{,}5<0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	*Remarque :* Les points de la représentation graphique sont alignés.	

II. Suites géométriques

1) Définition

Exemple : Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
u_0 = 5, u_1 = 10, u_2 = 20, u_3 = 40.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5. La suite est donc définie par : $u_{n+1}=2u_n$ et $u_0=5$.

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1}=q\times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

Vidéo https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ

La suite (u_n) définie par : $u_n=3\times 5^n$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times 5^{n+1}}{3\times 5^n}=\frac{5^{n+1}}{5^n}=5^{n+1-n}=5$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.
(u_n) est donc une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0=3\times 5^0=3$.

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%. Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :
$u_1=1{,}04\times 500=520$, $u_2=1{,}04\times 520=540{,}80$
$u_3=1{,}04\times 540{,}80=562{,}432$
De manière générale : $u_{n+1}=1{,}04\times u_n$ avec $u_0=500$
On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n=500\times 1{,}04^n$.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=u_0\times q^n$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE

La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1}=q\times u_n$.

- Si q ou u_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.
- Dans la suite, on suppose donc que q et u_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes : $u_1=q\times u_0$, $u_2=q\times u_1$, $u_3=q\times u_2$ … $u_n=q\times u_{n-1}$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$u_1\times u_2\times u_3\times \ldots \times u_n=u_0\times u_1\times u_2\times \ldots \times u_{n-1}\times q^n$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques : $u_n=u_0\times q^n$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/wUfleWpRr10

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4=8$ et $u_7=512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite sont de la forme $u_n=u_0\times q^n$.
Donc : $u_4=u_0\times q^4=8$ et $u_7=u_0\times q^7=512$.

Ainsi : $\frac{u_7}{u_4}=\frac{u_0\times q^7}{u_0\times q^4}$ ¿q^3 et $\frac{u_7}{u_4}=\frac{512}{8}$ ¿64 donc $q^3=64$.

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64. Ainsi $q=\sqrt[3]{64}=4$

Comme $u_0\times q^4=8$, on a : $u_0\times 4^4=8$ et donc : $u_0=$¿ $\frac{1}{32}$.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.
Pour $u_0>0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0<0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

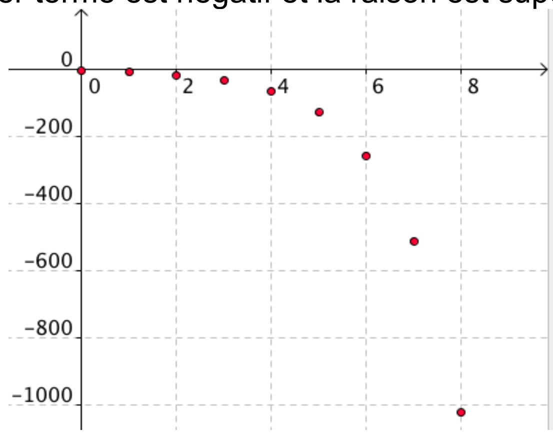
$u_{n+1}-u_n=u_0 q^{n+1}-u_0 q^n=u_0 q^n(q-1)$.

- Si q > 1 alors $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/vLshnJqW-64

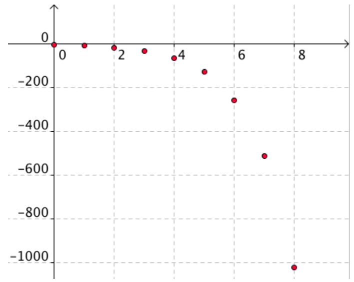
La suite géométrique (u_n) définie par $u_n=-4\times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

RÉSUMÉ	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q=2$ et $u_0=-4$
Définition	$u_{n+1}=q\times u_n$	$u_{n+1}=2u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n=u_0\times q^n$	$u_n=-4\times 2^n$
Variations	Pour $u_0>0$: Si q > 1 : (u_n) est croissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est décroissante.	$u_0=-4<0$ $q=2>1$ La suite (u_n) est décroissante.

	Pour $u_0<0$: Si $q>1$: (u_n) est décroissante. Si $0<q<1$: (u_n) est croissante.	
Représentation graphique	Remarque : Si $q<0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

III. Sommes de termes consécutifs

1) Cas d'une suite arithmétique

Propriété :

n est un entier naturel non nul alors on a : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

$= n \times (n+1)$

Donc : $2\times(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$ donc : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs

Vidéo https://youtu.be/iSfevWwk8e4

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$S_1=1+2+3+\ldots+348$ $\qquad$ $S_2=33+36+39+\ldots+267$

$S_1=1+2+3+\ldots+348$ soit ¿ $\frac{348\times349}{2}=60726$

$S_2=33+36+39+\ldots+267$ donc ¿ $3\times(11+12+13+\ldots+89)$

¿ $3\times((1+2+3+\ldots+89)-(1+2+3+\ldots+10))$ ¿ $3\times\left(\frac{89\times90}{2}-\frac{10\times11}{2}\right)=11850$

Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d'une série arithmétique.

2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a : $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/7msY7aEe084

$S=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n$ donc $q\times S=q+q^2+q^3+q^4+\ldots+q^{n+1}$

Ainsi : $S-q\times S=(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n)-(q+q^2+q^3+q^4+\ldots+q^{n+1})$

$S-q\times S=1-q^{n+1}$ donc $S\times(1-q)=1-q^{n+1}$ soit $S=$ ¿ $=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/eSDrE1phUXY

Calculer la somme S suivante : $S=1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{13}$

On obtient : $S=1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{13}$

donc S = $\frac{1-3^{14}}{1-q}$ = ¿ 2391484