La Trigonométrie – Tale spé maths

A) Les Angles orientés (Rappels)

1) Le Radian

Définition : Soit α_{deg} un angle en degrés, la mesure de α_{rad} en radians est donnée par l'expression : $\alpha_{rad}=\frac{\pi}{180°}\times\alpha_{deg}$

<u>*exemple*</u> : obtient le tableau de conversions ci-dessous

deg	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
rad	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

2) Le cercle trigonométrique

Définition : On appelle « *Cercle trigonométrique* » le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon $r=1$ (unité) où les <u>angles orientés</u> et notés <u>en radians</u>,

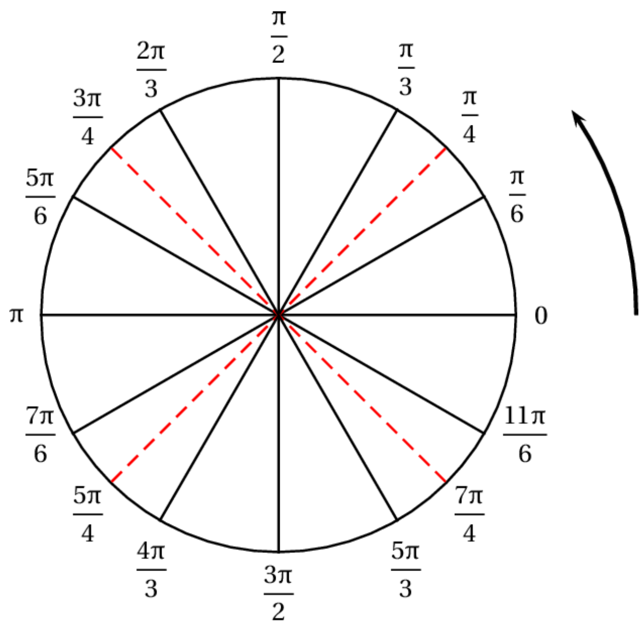
<u>*Note*</u> : l'orientation positive correspond au sens contraire de la montre

Définition : On appelle « *Point image* » noté $M(\alpha)$ d'un angle en radian α le point du cercle trigonométrique associé à cet angle

<u>*exemple*</u> : On obtient les points images des valeurs remarquables ci-contre

On pourra utiliser les techniques de construction :

- $A(\frac{\pi}{3})$ a pour abscisse $x=0{,}5$
- $B(\frac{\pi}{6})$ a pour ordonnée $y=0{,}5$
- $C(\frac{\pi}{4})$ a pour coordonnées $x=y$



3) Mesure principale

Définition : On appelle « *mesure principale* » d'un angle α la meure en radian telle que $\alpha\in]-\pi;\pi]$

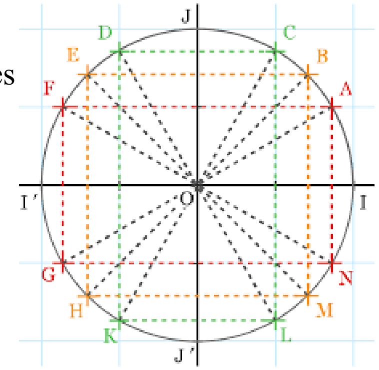
<u>*exemple*</u> : On donne les points images ci-contre

Les mesures principales associées à ces points images sont : $I(0)$, $A(\frac{\pi}{6})$, $B(\frac{\pi}{4})$, $C(\frac{\pi}{3})$,

$J(\frac{\pi}{2})$, $D(\frac{2\pi}{3})$, $E(\frac{3\pi}{4})$, $F(\frac{5\pi}{6})$,

$I'(\pi)$, $N(\frac{-\pi}{6})$, $M(\frac{-\pi}{4})$, $L(\frac{-\pi}{3})$,

$J'(\frac{-\pi}{2})$, $K(\frac{-2\pi}{3})$, $H(\frac{-3\pi}{4})$, $G(\frac{-5\pi}{6})$

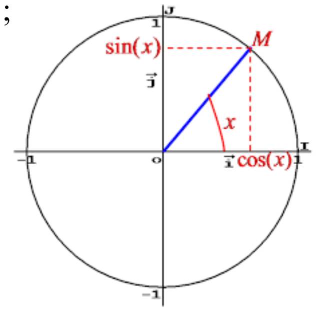


B) Les Lignes Trigonométriques (Rappels)

1) Cosinus & Sinus

Définition : On se place dans le Cercle Trigonométrique ; soit x un angle orienté en radian et $M(x)$ son point image sur le cercle ; on définit :

- Le « *Cosinus de x* » l'abscisse du point M
- Le « *Sinus de x* » l'ordonnée du point M



<u>*explications*</u> : Notons P le projeté orthogonal de M sur l'axe (Ox) et Q le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oy)

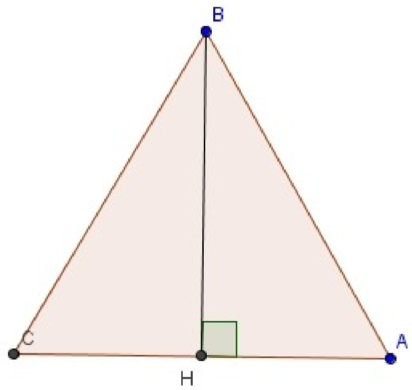
Alors $cox(x)=\frac{OP}{OM}=\frac{OP}{1}=x_M$ et $\sin(x)=\frac{PM}{OM}=\frac{OQ}{1}=y_M$

2) Lignes trigonométriques usuelles

Propriétés : les lignes trigonométriques des mesures principales sont données dans le tableau ci-dessous

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	– 1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	– 1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1

Preuves : Pour les valeurs $\alpha \in \{-\pi ; \frac{-\pi}{2}, 0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi\}$ les lignes trigonométriques se déduisent facilement ; pour les valeurs $\alpha \in \{\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\}$ on se place dans un triangle équilatéral de côté a



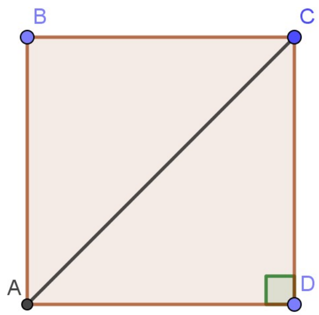
$$\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\widehat{BAH}) = \frac{BH}{AB} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

de même $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

on se place dans un carré de côté a



$$\cos(\widehat{CAD}) = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\widehat{CAD}) = \frac{CD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C) Les Relations Trigonométriques

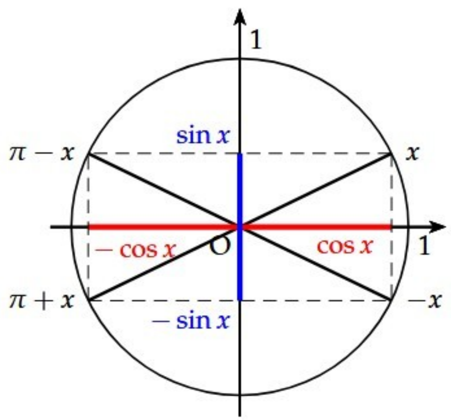
1) Relations de symétrie

Propriétés : Soit $x \in]-\pi ; \pi]$ alors on a les relations suivantes

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{array}}$$

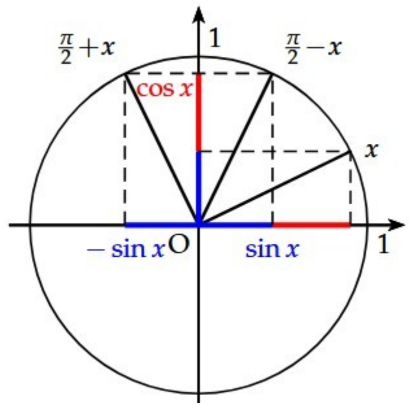


2) Relations de déphasages

Propriétés : Soit $x \in]-\pi ; \pi]$
alors on a les relations suivantes

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x) \end{array}}$$

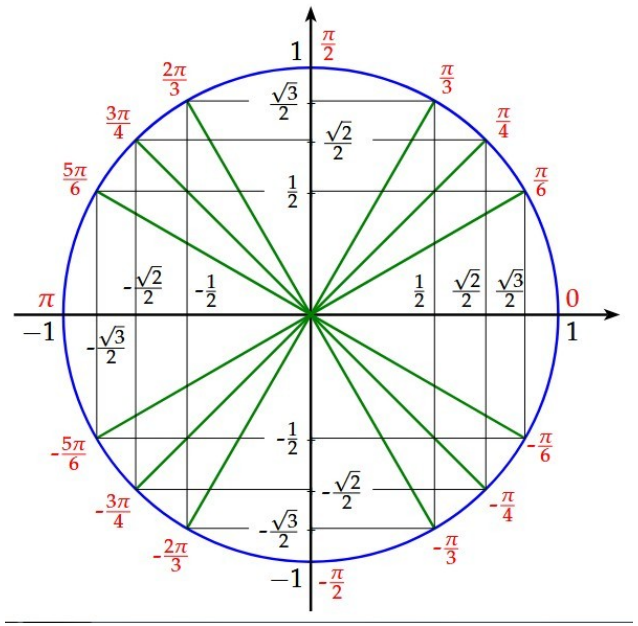


3) Lignes trigonométriques généralisées

Propriétés : les lignes trigonométriques des mesures principales généralisées sont

Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

On retiendra tous ces résultats dans le cercle trigonométrique



4) Les relations d'additions & de duplications

Propriétés : ***Formules d'additions***

Soit $a, b \in]-\pi ; \pi]$ alors on a les relations suivantes

- $\cos(a-b)=\cos(a).\cos(b)+\sin(a).\sin(b)$
- $\cos(a+b)=\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)$
- $\sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)-\sin(a).\cos(b)$
- $\sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\sin(a).\cos(b)$

Preuves : On se place dans le cercle trigonométrique d'origine O avec $A(\cos a ; \sin a)$ et $B(\cos b ; \sin b)$

donc $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b)$

donc $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos(a-b)$

or $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_A . x_B + y_A . y_B$

donc

$\cos(a-b)=\cos(a).\cos(b)+\sin(a).\sin(b)$

de même

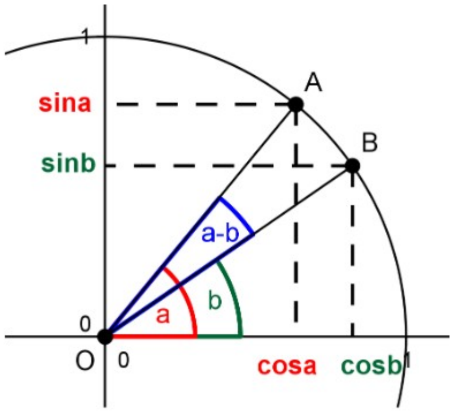
$det(\vec{OA}, \vec{OB}) = OA \times OB \times \sin(a-b)$

donc $det(\vec{OA}, \vec{OB}) = \sin(a-b)$

or $det(\vec{OA}, \vec{OB}) = x_A . y_B - x_B . y_A$

donc

$\sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)-\sin(a).\cos(b)$



Propriétés : ***Formules de duplications***

Soit $a \in]-\pi ; \pi]$ alors on a les relations suivantes

- $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$
- $\sin(2a)=2\sin(a).\sin(a)$

Preuves : On utilise les formules d'addition avec $a=b$

$\cos(2a)=\cos(a+a)=\cos(a).\cos(a)-\sin(a).\sin(a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$

$\cos(2a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))=2\cos^2(a)-1$

$\cos(2a)=(1-\sin^2(a))-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a)$

$\sin(2a)=\sin(a+a)=\sin(a).\cos(a)+\sin(a).\cos(a)=2\sin(a).\cos(a)$

Rque : on déduit que $\tan(2a)=\dfrac{\sin(2a)}{\cos(2a)}=\dfrac{2\sin(a)\cos(a)}{\cos^2(a)-\sin^2(a)}=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

D) Équations trigonométriques

1) Les équations avec COS

Propriété : Soit $x \in]-\pi ; \pi]$ alors on a les propriétés générales suivantes

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$; $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

Propriété : Soit $x \in]-\pi ; \pi]$ et soit $a \in [-1 ; 1]$ alors les solutions de l'équation $\cos(x)=\cos(a)$ sont $x=a[2\pi]$ ou $x=-a[2\pi]$

<u>*Notation*</u> : on dit que $x=y[n]$ si il existe un entier relatif k tel que $x=y+kn$; on lit « *x* est égal à *y* modulo *n* »

<u>*exemples*</u> : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I donné

a) $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ avec $I=[0 ; \dfrac{\pi}{2}]$

b) $\cos(x)=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ avec $I=[-\pi ; 0]$

c) $\cos(x)=\dfrac{3}{5}$ avec $I=[\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}]$

2) Les équations avec SIN

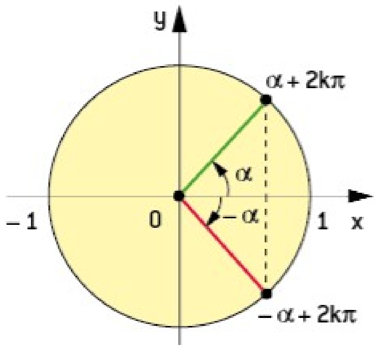
Propriété : Soit $x \in]-\pi ; \pi]$ et soit $a \in [-1 ; 1]$ alors les solutions de l'équation $\sin(x)=\sin(a)$ sont $x=a[2\pi]$ ou $x=\pi-a[2\pi]$

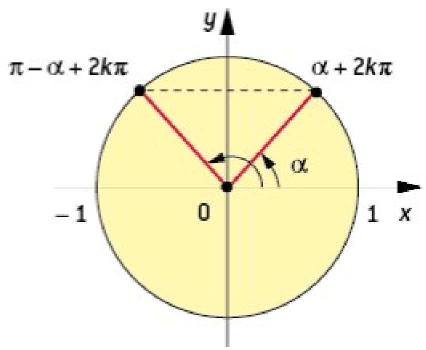
<u>*exemples*</u> : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I donné

a) $\sin(x)=\dfrac{-1}{2}$ avec $I=[\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}]$

b) $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $I=[\dfrac{\pi}{2} ; \pi]$

c) $\sin(x)=\dfrac{-3}{5}$ avec $I=[-\pi ; 0]$





E) Études des fonctions trigonométriques

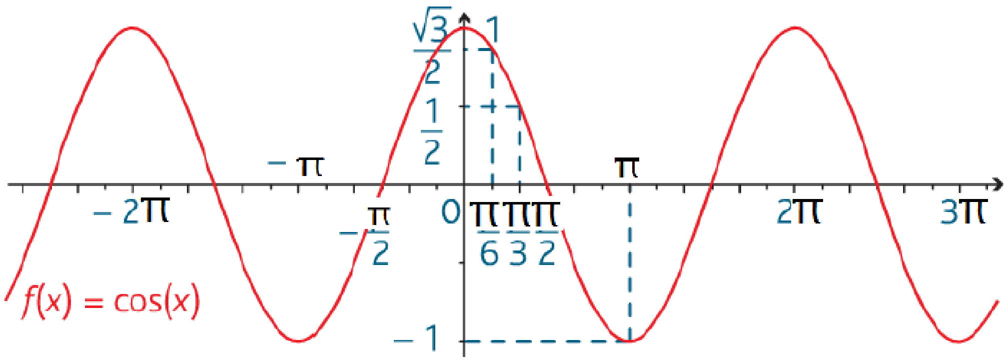
1) La fonction COS

Définition : la « fonction COSINUS » est définie par : $f(x)=\cos(x)$
pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $f(x)\in[-1\,;1]$

Propriété : La fonction « COSINUS » est paire sur $\mathbb{R}$: $f(-x)=f(x)$
Propriété : La fonction « COSINUS » est $2\pi-\textit{périodique}$ sur $\mathbb{R}$:
$f(x+2k\pi)=f(x)$ pour tout entier relatif k

Propriété : La fonction « COSINUS » est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\sin(x)$
On déduit le tableau de variations ci-dessous

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos' x$	0	$-$	
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1



2) La fonction SIN

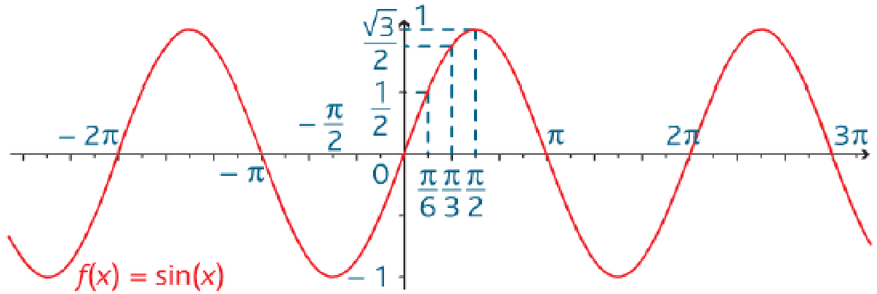
Définition : la « fonction SINUS » est définie par : $g(x)=\sin(x)$
pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $f(x)\in[-1\,;1]$

Propriété : La fonction « SINUS » est impaire sur $\mathbb{R}$: $g(-x)=-g(x)$

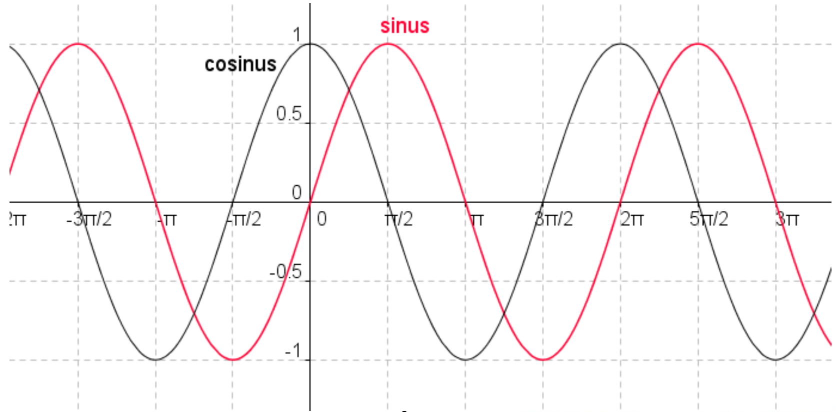
Propriété : La fonction « SINUS » est $2\pi-\textit{périodique}$ sur $\mathbb{R}$:
$g(x+2k\pi)=g(x)$ pour tout entier relatif k

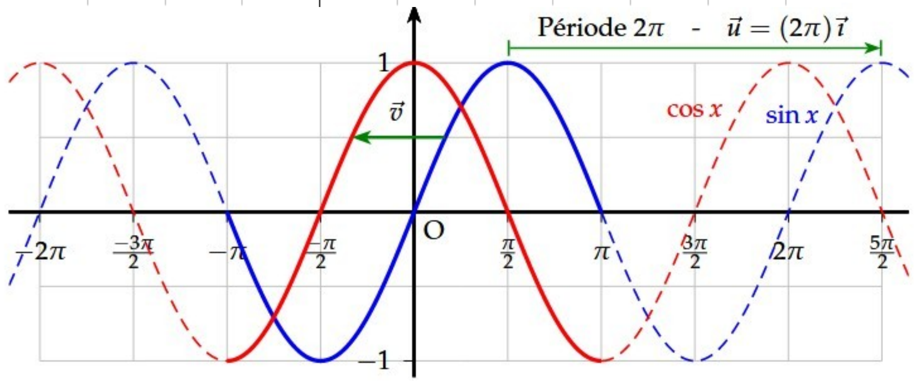
Propriété : La fonction « SINUS » est dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(x)=\cos(x)$
On déduit le tableau de variations ci-dessous

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin' x$	$+$	0	$-$
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0



Les courbes des fonctions sinus et cosinus sur un même graphique :





3) Étude d'une fonction trigonométrique

Énoncé : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos(x)}$

a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$
b) Montrer que la fonction f est paire et 2π-périodique.
En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f
c) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
d) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$ puis tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi\,;\,3\pi]$

Solution :

$D_f=\mathbb{R}$ car l'équation $2+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

La fonction f est paire et 2π périodique, en effet pour tout réel x :

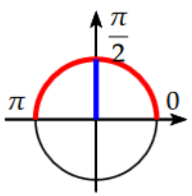
$$f(-x)=\frac{2}{2+\cos(-x)}=\frac{2}{2+\cos x}=f(x)$$
$$f(x+2\pi)=\frac{2}{2+\cos(x+2\pi)}=\frac{2}{2+\cos x}=f(x)$$

La fonction f est 2π-périodique, on peut l'étudier sur $]-\pi\,;\,\pi]$ et comme f est paire, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0\,;\,\pi]$

$$f'(x)=-\frac{2(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\sin x}{(2+\cos x)^2}$$

Sur $[0\,;\,\pi]$

- $f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$ ou $x=\pi$
- Le signe de $f'(x)$ est du signe de $\sin x$ donc $f'(x)\geqslant 0$



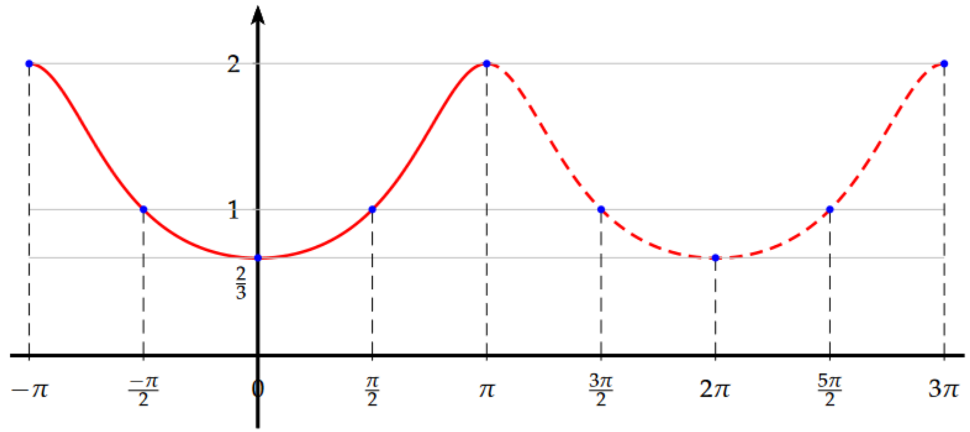
$\sin x \geqslant 0$

Pour déterminer les variation de f sur $[-\pi\,;\,0]$, on utilise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0		$-$		0		$+$		0
$f(x)$	2	↘	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1	↗	2

$$f(0)=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{2+0}=1$$
$$f(\pi)=\frac{2}{2-1}=2$$

Par translation, on obtient alors la courbe dans l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$:



Rque : Dans un Devoir, pas oublier d'ajouter sur le graphique

- Les « *doubles tangentes* » aux points $x=0$, $x=\pi$ et $x=2\pi$
- Les « *simples tangentes* » aux points $x=-\pi$ et $x=3\pi$