

Ex 1 : Amérique du Nord 21mai 2024 – Sujet 1

Cet exercices est un QCM – justifier brièvement chaque question

1. On considère les points $A(1; 0; 3)$ et $B(4; 1; 0)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. M(x; y; z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x-1 = 3t \\ y-0 = 1t \\ z-3 = -3t, \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ Réponse c.}$$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Réponse d.

3. • Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$: ces vec-

teurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

• Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = 3k-5 \\ 6t = -2k-1 \\ -2t = k-3 \end{cases}$$

Par différence de la ligne 1 et de la ligne 2, on obtient $-2t = 5k - 4 = k - 3$ (ligne 3) soit $4k = 1 \iff k = \frac{1}{4}$, puis comme $-2t = k - 3 = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$, d'où $t = \frac{11}{8}$, mais la

première ligne donne $4t = 3k - 5 = \frac{3}{4} - 5 = -\frac{17}{4}$, d'où $t = \frac{17}{8}$: ceci n'est pas possible : les deux droites ne sont pas sécantes.

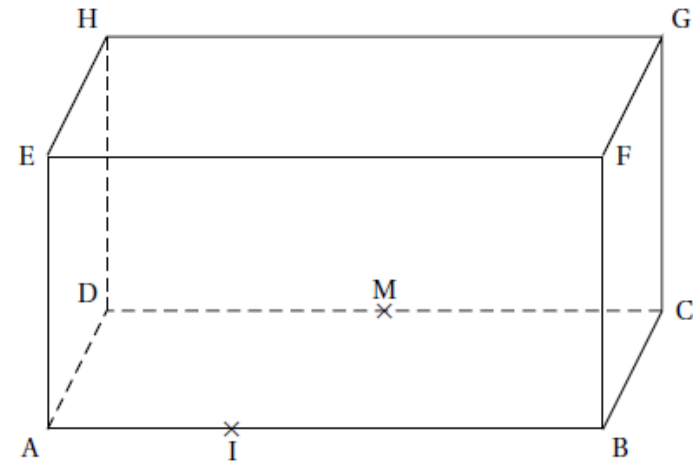
• Les deux droites ne sont pas confondues : il reste la réponse b.

4. Le vecteur \vec{n} vecteur directeur de (d) est un vecteur normal au plan (P) . On a donc

$$M(x; y; z) \in (P) \iff \overrightarrow{IM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 4(x-2) + 6(y-1) - 2(z-0) = 0 \iff 4x - 8 + 6y - 6 - 2z = 0 \iff 4x + 6y - 2z - 14 = 0 \iff 2x + 3y - z - 7 = 0 : \text{réponse a.}$$

Ex 2 : Amérique du Nord - 22mai 2024 – Sujet 2

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



1. $F(3; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $M(1,5; 1; 0)$.

2. a. Soit $\overrightarrow{HF} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MF} \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas co-

linéaires.

$$\text{On a } \vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 6 - 6 + 0 = 0$$

$$\text{On a } \vec{n} \cdot \overrightarrow{MF} = 3 - 6 + 3 = 0.$$

Conclusion : le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF) , il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$$X(x; y; z) \in (MHF) \iff 2x + 6y + 3z + d = 0. \text{ Ainsi par exemple :}$$

$$H(x; y; z) \in (MHF) \iff 0 + 6 + 3 + d = 0 \iff d = -9, \text{ donc finalement :}$$

$$X(x; y; z) \in (MHF) \iff 2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

c. Le plan \mathcal{P} a par exemple pour vecteur normal $\vec{p} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur \vec{n} , (on a bien $2 \times \frac{5}{2} = 5$, $6 \times \frac{5}{2} = 15$, mais $3 \times \frac{5}{2} \neq -3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3. On a $D(0; 1; 0)$ et $G(3; 1; 1)$, d'où $\overrightarrow{DG} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On sait que :

$$X(x; y; z) \in (DG) \iff \overrightarrow{DX} = t\overrightarrow{DG}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x-0 = 3t \\ y-1 = 0 \\ z-0 = 1t \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

4. Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x , y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$6t + 6 + 3t - 9 = 0 \iff 9t - 3 = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}. \text{ Les coordonnées de N sont donc } \left(3 \times \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3}\right), \text{ soit } N\left(1; 1; \frac{1}{3}\right).$$

5. • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$$R\left(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \in (\text{HMF}) \iff 6 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 9 = 0 \iff 6 + 3 - 9 = 0 \text{ ce qui est vrai.}$$

• On vérifie maintenant que le vecteur \overrightarrow{GR} est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

$$\text{On a } \overrightarrow{GR} \begin{pmatrix} 3-3 \\ \frac{1}{4}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vec-}$$

teur connu $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$: pour que \vec{n} soit colinéaire au vecteur \overrightarrow{GR} il faudrait que sa première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

Ex 3 : Centres étrangers 15 juin 2024 – Sujet 1

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 3 - 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ -1 - 0 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. a. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times -2 = 1 + 9 - 10 = 0$
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 3 \times -1 + 5 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0$

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan

(ABC) donc \vec{n} est orthogonal au plan (ABC).

b. Le vecteur \vec{n} est orthogonal au plan (ABC), c'est donc un vecteur normal du plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

$$x + 3y + 5z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point A appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan. On a donc :

$$-2 + 3 \times 0 + 5 \times 2 + d = 0 \iff -2 + 10 + d = 0 \iff d = -8$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

c. $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7 \neq 0$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) d'où les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. a. Une équation paramétrique de \mathcal{D}_1 est :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

D'une part : pour $t = 0$, on a
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3 + 5 \times 0 = 3 \end{cases}.$$

On reconnaît les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite \mathcal{D}_1 .

D'autre part : un vecteur directeur de \mathcal{D}_1 est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est à dire

le vecteur \vec{n} qui est orthogonal au plan(ABC).

Donc la droite \mathcal{D}_1 est orthogonal au plan (ABC).

Donc la droite \mathcal{D}_1 est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

b. Pour déterminer les points éventuels d'intersection des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ré-

solvons le système (S) :
$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 \times (1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5 \times (1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s = 1 + 3 \times \frac{-2}{7} = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont sécantes.

Remplaçons t par $\frac{1}{7}$ dans l'équation paramétrique de \mathcal{D}_1

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = 3 \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ z = 3 + 5 \times \frac{1}{7} = \frac{26}{7} \end{cases}$$

Les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{26}{7}\right)$.

4. a. Soit H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la hauteur issue de D dans le tétraèdre ABCD c'est à dire la droite \mathcal{D}_1 .

Les coordonnées de H vérifient donc l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite \mathcal{D}_1 .

$$t + 3 \times (3t) + 5 \times (3 + 5t) - 8 = 0 \Leftrightarrow t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \Leftrightarrow 35t = -7 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{35} = -\frac{1}{5}$$

Remplaçons t par $-\frac{1}{5}$ dans l'équation paramétrique de \mathcal{D}_1

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = 3 \times \frac{-1}{5} = -\frac{3}{5} \\ z = 3 + 5 \times \frac{-1}{5} = \frac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

Le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est le point H de coordonnées $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)$.

b. La distance du point D au plan (ABC) est égale à la longueur DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

$$DH^2 = \left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2 - 3)^2 = \frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1 = \frac{35}{25}$$

$$DH = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{14}{10}} = \sqrt{1,4} \text{ ou } \frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1,183 \text{ soit } 1,18 \text{ au centième près.}$$

Ex 4 : Asie 11 juin 2024 – Sujet 2

Partie A

1. Vérifions si les coordonnées des points vérifient ou non l'équation de (P) :

- $2x_A + 2y_A - 3z_A + 1 = 2 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \times 1 + 1 = 2 + 0 - 3 + 1 = 0$: A est dans le plan (P) ;
- $2x_B + 2y_B - 3z_B + 1 = 2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 4 - 2 - 3 + 1 = 0$: B est dans le plan (P) ;
- $2x_C + 2y_C - 3z_C + 1 = 2 \times (-4) + 2 \times (-6) - 3 \times 5 + 1 = -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \neq 0$: C n'est pas dans le plan (P) .

2. On a : $\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 0 - (-4) \\ -2 - (-6) \\ -1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'après l'équation que l'on a du plan (P) , $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P) .

Comme on a manifestement $\overrightarrow{CC'} = 2\vec{n}$, ces vecteurs sont colinéaires, et donc la droite (CC') est orthogonale au plan (P) .

De plus : $2x_{C'} + 2y_{C'} - 3z_{C'} + 1 = 2 \times 0 + 2 \times (-2) - 3 \times (-1) + 1 = 0 - 4 + 3 + 1 = 0$: $C' \in (P)$.

Finalement, C' est un point du plan (P) tel que (CC') est orthogonale à (P) : cela confirme que C' est le projeté orthogonal de C sur (P) .

3. La droite (AB) passe par $A(1 ; 0 ; 1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique est :

4. Si H est un point de (AB) , cela signifie qu'il existe un réel t_0 tel que H est le point de paramètre t_0 sur (AB) .

On a : (AB) et (CH) seront orthogonales (et donc nécessairement perpendiculaires, car elles ont H en commun) si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CH} sont orthogonaux.

On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} (1+t_0) - (-4) \\ (-t_0) - (-6) \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+t_0 \\ 6-t_0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Comme le repère est orthonormé, on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 1 \times (5+t_0) + (-1) \times (6-t_0) + 0 \times (-4) = 5+t_0-6+t_0 = 2t_0-1$

On a donc : (AB) et (CH) sont orthogonales $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$

$$\Leftrightarrow 2t_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{2}$$

L'unique pour H de la droite (AB) pour lequel (AB) et (CH) sont orthogonales est donc le point de paramètre $t_0 = \frac{1}{2} = 0,5$ dans la représentation que nous avons donnée à la question précédente. Ses coordonnées sont donc : $H(1,5 ; -0,5 ; 1)$.

Partie B

Les coordonnées admises pour le vecteur \overrightarrow{HC} sont cohérentes avec les coordonnées du point H à la question précédente.

1. On est dans un repère orthonormé, donc :

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} = \sqrt{\frac{153}{2}} = \sqrt{76,5}.$$

La valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$ est donc : $\sqrt{\frac{153}{2}} = \sqrt{76,5}$.

2. Le point H, en tant que point de (AB) tel que (CH) est orthogonale à (AB) , est donc le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Pour calculer la surface du triangle, on va donc utiliser la formule : $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

Ici, le plus simple sera donc de choisir $[AB]$ comme base, de longueur AB et donc la hauteur correspondante est $CH = \|\overrightarrow{CH}\|$.

On a déjà calculé CH à la question précédente, donc :

$$AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0} = \sqrt{2}.$$

$$\text{L'aire de ABC est donc : } S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{2}.$$

Partie C

1. • On a établi au début de l'exercice que A et B appartiennent à (P) , donc toute la droite (AB) est incluse dans (P) , et donc notamment H appartient à (P) aussi.

• H et C' sont donc deux points de (P) , et on sait que (CC') est orthogonale à (P) .

(CC') étant orthogonale à (P) , elle est orthogonale à toute droite de (P) , dont la droite $(C'H)$, ces droites sont donc perpendiculaires, car elles se coupent évidemment en C' .

Le triangle CHC' est donc un triangle rectangle en C' .

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est donné par le quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle (ici $C'H$) par la longueur de l'hypoténuse du triangle (ici CH).

$$\text{Ici, on a donc : } \cos(\alpha) = \frac{C'H}{CH} = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\sqrt{\frac{153}{2}}} = \sqrt{\frac{17}{153}} = \sqrt{\frac{17 \times 1}{17 \times 9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

2. a. *Méthode 1* : le plus rapide, ici, serait de calculer le produit scalaire des vecteur directeurs des deux droites, et de prouver qu'il est nul.

Mais comme on a fait quelque chose de similaire dans ce corrigé, on va explorer une voie différente :

Méthode 2 :

- On sait que (CH) est orthogonale à (AB), d'après la définition du point H à la question A 4.;
- on sait que (CC') est orthogonale à (AB), car (CC') étant orthogonale à (P), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (P), notamment (AB);
- on sait que les droites (CH) et (CC') sont sécantes (en C), car les points C' et H sont les intersections de ces deux droites avec (P), et sont séparés par une distance non nulle.

Ainsi, on vient de démontrer que C, C' et H définissent un plan, et que deux droites sécantes du plan (CC'H) sont orthogonales à (AB), donc que (AB) est orthogonale au plan (CC'H) et donc à toutes les droites de ce plan là, notamment à la droite (C'H).

Remarque : le plan (CC'H) est ce que l'on appelle le **plan médiateur** du segment [AB] : le plan qui passe par le milieu (H) du segment et lui est perpendiculaire.

- b. On applique à nouveau la formule de calcul de l'aire d'un triangle.

Ici, on va prendre [AB] comme base et donc, d'après la question précédente, [C'H] est la hauteur correspondante.

$$\text{On a donc : } S' = \frac{AB \times C'H}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{c. On a donc : } \cos(\alpha) = \frac{C'H}{CH} = \frac{AB \times C'H}{AB \times CH} = \frac{\frac{AB \times C'H}{2}}{\frac{AB \times CH}{2}} = \frac{S'}{S}.$$

Voilà une relation possible.

On peut aussi écrire : $S' = \cos(\alpha)S$ par exemple.

Affirmation 1 : Vraie

Ici, il y a deux éléments à justifier : d'une part A, C et D définissent un plan et d'autre part, ce plan a bien l'équation annoncée.

$$\bullet \text{ On a : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Avec $x_{\overrightarrow{AD}} = -x_{\overrightarrow{AC}}$ mais $y_{\overrightarrow{AD}} \neq -y_{\overrightarrow{AC}}$, il est évident que les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} ne sont pas colinéaires, donc que les points A, C et D ne sont pas alignés, et donc :

A, C et D définissent un plan;

Ex 5 : Métropole 20 juin 2024 – Sujet 2

Cet exercice est un QCM – justifier brièvement chaque question

- le plan d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 2 - 5 \times 4 + 4 \times 1 = 16 - 20 + 4 = 0$$

$$\text{et } \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 \times (-2) - 5 \times 0 + 4 \times 4 = -16 - 0 + 16 = 0$$

$\overrightarrow{n_1}$ est donc bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACD), donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal au plan (ACD).

Le plan dont on a l'équation partage un vecteur normal avec (ACD) : ces deux plans sont parallèles.

$$\text{Comme, de plus, } 8x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 8 \times 2 - 5 \times 0 + 4 \times 0 - 16 = 16 - 16 = 0$$

on en déduit que les coordonnées de A vérifient l'équation donnée, et donc que A est dans le plan dont on a l'équation, ce plan est donc confondu avec (ACD).

Finalement, on a bien confirmé que les points A, C et D définissent un plan \mathcal{P} d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Remarque : pour le deuxième point de cette question, on pouvait aussi vérifier que A, C et D avaient des coordonnées vérifiant l'équation donnée, cela revenait au même.

Affirmation 2 : Fausse

Puisque l'on sait que A, C et D définissent le plan \mathcal{P} d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$, alors on a : les points A, B, C et D sont coplanaires $\iff B \in \mathcal{P}$

$$\iff 8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 = 0$$

$$\iff 8 \times 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = 0$$

$$\iff 0 - 20 + 12 - 16 = 0$$

$$\iff -24 = 0$$

Comme $-24 \neq 0$, on en déduit que B n'appartient pas à \mathcal{P} , et donc que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vraie

les droites (AC) et (BH) sont dirigées par $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivement. Comme ces vecteurs sont visiblement non colinéaires, les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour chercher un éventuel point d'intersection, on a donné des représentations paramétriques des deux droites :

$$(AC) \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 4s \\ z = s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R} \quad (BH) \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Si on considère M_s le point de paramètre s sur la droite (AC) et N_t le point de paramètre t sur (BH), alors :

$$\begin{aligned} M_s = N_t &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2s = -t \\ 4s = 4 - 3t \\ s = 3 - t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8 = -t + 2t \\ 12 - 4 = -3t + 4t \\ s = 3 - t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2(3 - t) = -t \\ 4(3 - t) = 4 - 3t \\ s = 3 - t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 8 \\ s = 3 - 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 6 - 2t = -t \\ 12 - 4t = 4 - 3t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Affirmation 4 : Vraie

Il y a deux éléments à vérifier ici pour répondre positivement : le point H est-il un point du plan (ABC), et le vecteur \overrightarrow{DH} est-il normal au plan ?

- On a : $x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = -2 + 4 - 2 = 0$

Les coordonnées de H vérifient l'équation donnée pour (ABC), donc H est bien un point du plan (ABC) ;

- On a : $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'après l'équation donnée pour (ABC), un vecteur normal

à (ABC) est : $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme on a : $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{DH}$, on en déduit que les vecteurs sont colinéaires, donc que \overrightarrow{DH} est normal au plan (ABC).

En conclusion, H est un point de (ABC) tel que (DH) est orthogonale à (ABC) : H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

Ex 6 : Polynésie 19 juin 2024 – Sujet 1

Cet exercice est un QCM – justifier brièvement chaque question

$$A(2; 1; -1), \quad B(-1; 2; 1) \text{ et } C(5; 0; -3).$$

On note \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne : $x + 5y - 2z + 3 = 0$.

On note \mathcal{D} la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

A Affirmation 2 :

On cherche la représentation paramétrique de (AB). On a :

C

$M(x; y; z) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient :

I

$M(x; y; z) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -3u \\ y - 1 = u \\ z + 1 = 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3u \\ y = 1 + u \\ z = -1 + 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$

Affirmation 3 :

Si un point $M(x; y; z)$ est commun à la droite \mathcal{D} et au plan \mathcal{P} ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de \mathcal{D} et l'équation cartésienne de \mathcal{P} , donc le système :

Affirmation 4 :

• Le milieu H de [BC] a pour coordonnées $H\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{1-3}{2}\right)$, soit $H(2; 1; -1)$.
 $3x_H - y_H - 2z_H - 7 = 3 \times 2 - 1 - 2 \times (-1) - 7 = 0$ donc $H \in Q$.

D

• Le vecteur \overrightarrow{BC} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 0 - 2 \\ -3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

é

Le plan Q a pour vecteur normal le vecteur \overrightarrow{v} de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{v}$ donc le vecteur \overrightarrow{BC} est normal au plan Q.

L'affirmation 4 est vraie.

Ex 7 : Polynésie 20 juin 2024 – Sujet 2

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C sont distincts et non alignés : ils définissent le plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

Dans la suite, on considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 10 + 3 - 13 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 6 - 10 = 0$.

Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan

b. On sait qu'alors :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 2x - 3y + 1z + d = 0, d \in \mathbb{R}.$$

Par exemple $A(-1; -1; 17) \in (ABC) \iff -2 + 3 + 17 + d = 0 \iff d = -18$, donc

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 2x - 3y + z - 18 = 0.$$

3.

$$d : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. On sait que les coordonnées d'un vecteur directeur \vec{d} de d sont les coefficients

de t , soit $\vec{d} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. Les coordonnées de E commun à d et au plan (ABC) vérifient les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de (ABC) soit le système

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \\ 2x - 3y + 1z - 18 = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$$2(3t + 2) - 3(t + 5) + 4t + 1 - 18 = 0 \iff 6t + 4 - 3t - 15 + 4t + 1 - 18 = 0 \iff$$

$$7t - 28 = 0 \iff 7t = 28 \iff t = 4.$$

D'où les coordonnées de E en remplaçant t par dans les équations de d : E(14; 9; 17)

4. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC) soit le vecteur \vec{n} .

$$\text{Une équation de } \Delta \text{ est donc } \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -3t + 5 \\ z = t + 1 \\ 2x - 3y + 1z - 18 = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En résolvant le système obtenu en rajoutant l'équation de \mathcal{P} permet d'obtenir $t = 2$, d'où F(6; -1; 3).

Puisque la droite (DF) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} , la distance DF est la (plus courte) distance du point au plan \mathcal{P} .

$$\text{Or } \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \|\overrightarrow{DF}\|^2 = DF^2 = 4^2 + (-6)^2 + 2^2 = 16 + 36 + 4 = 56 = 4 \times 14.$$

On a donc $DF = \sqrt{4 \times 14} = \sqrt{4} \times \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$ (en centaines de mètres).

5. La plus petite distance du point de lancer au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres : il faut donc calculer le temps mis à la vitesse de $18,6 \text{ m.s}^{-1}$ par un drone pour effectuer ce parcours de D à F.

$$\text{On sait que } v = \frac{d}{t}, \text{ ou } t = \frac{d}{v} = \frac{DF}{v} = \frac{2\sqrt{14} \times 100}{18,6} \approx 40,23 \text{ (secondes).}$$

Conclusion : le drone n'arrivera pas à temps.