Ex 1 : Amérique du Nord – 21 mai 2024 – Sujet 1

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0\,;\,-4)$.

1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1)$; on lit sur le graphique $f'(1) = \frac{3}{1} = 3$.
   L'ordonnée à l'origine est égale à -4, donc l'équation réduite de la tangente (T) est

$$M(x\,;\,y) \in (T) \iff y = 3x - 4.$$

2. • il semble que f est concave sur $]0;\,1[$;
   • il semble que f est convexe sur $]1\,;\,+\infty[$.
   Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Partie B : étude analytique

1.
   • On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right) = +\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   • Avec $f(x) = 2x\ln x - \frac{1}{x}$, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de zéro.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \ln\left(x^2\right)$ et $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et l'on a :
   $f'(x) = \ln\left(x^2\right) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \ln\left(x^2\right) + 2 + \frac{1}{x^2}$ ou $f'(x) = 2\ln x + 2 + \frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. En dérivant $f'(x)$ on obtient :
   $f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2-2}{x^3} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.
3. **a.** Comme $x^3 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x+1)(x-1)$ et comme $x+1 > 1 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$.
   Conclusion :
   • Sur $]0\,;\,1[$, $x < 1$, $f''(x) < 0$: la fonction est concave ;
   • Sur $]1\,;\,+\infty[$, $x > 1$, $f''(x) > 0$: la fonction est convexe ;
   • pour $x = 1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : le point A est le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.
   b. Du signe de $f''(x)$ on en déduit les variations de f' qui est décroissante sur $]0;\,1[$ puis croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $f'(1) = 2+1 = 3$ (vu à la question **1.**).
   Comme 3 est le minimum de f', on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. **a.** Tableau de variations de f :

x	0		1		2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	↘	3	↗		↗	
f	‖ $-\infty$	↗	-1	↗	$\approx 2{,}27$	↗	$+\infty$

   Sur l'intervalle $]1;\,2[$ la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante avec $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha \in]1\,;\,2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   b. La calculatrice donne $f(1{,}3) \approx -0{,}09$ et $f(1{,}4) \approx 0{,}23$ donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$, puis $f(1{,}32) \approx -0{,}02$ et $f(1{,}33) \approx 0{,}007$, d'où $1{,}32 < \alpha < 1{,}33$ et enfin $f(1{,}327) \approx -0{,}003$ et $f(1{,}328) \approx 0{,}0004$, donc $\alpha \approx 1{,}33$ au centième près.
   On sait que α est solution de $f(x) = 0 \iff x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x} = 0 \iff$
   $x\ln\left(x^2\right) = \frac{1}{x} \iff \ln\left(x^2\right) = \frac{1}{x^2}$ et enfin par croissance de la fonction exponentielle :
   $\exp\left(\ln\left(x^2\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \iff x^2 = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   α vérifie cette équation donc $\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

Ex 2 : Centres Étrangers – 6 juin 2024 – Sujet 2

1. **a.** La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} > 0$.

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$, et comme on travaille sur $]-\infty\,;\,1[$, on a $x-1<0$. (on peut noter $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0^-$).

Par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x=1$.

2. On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$;

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to -\infty} x-1 = -\infty$,

Par limite du quotient, on en déduit : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet également une asymptote, d'équation $y=0$, au voisinage de $-\infty$.

3. **a.** f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominatuer ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

$x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$, donc sur $]-\infty\,;\,1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions **1. a.** et **2.**) :

x	$-\infty$		1
signe de $f'(x)$		$-$	‖
variations de f	0	↘	$-\infty$ ‖

4. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

Comme, pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, on a $(x-1)<0$ et donc $(x-1)^3<0$ et $\mathrm{e}^x>0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : x^2-4x+5.

Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.

Rem. On peut écrire :

$x^2-4x+5 = (x-2)^2-4+5 = (x-2)^2+1 \geqslant 1 > 0$: le trinôme est positif quel que soit $x\in\mathbb{R}$.

Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $]-\infty\,;\,1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$.

b. Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

- $f'(0) = \dfrac{(0-2)\mathrm{e}^0}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$;
- $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

La formule classique donne une équation pour T :

$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -2x-1$

L'équation réduite de T est donc : $y=-2x-1$.

c. Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T, sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x-1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc : $\quad x \in]-\infty\,;\,1[\implies f(x) \leqslant -2x-1$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{e^x}{x-1} \leqslant -2x-1\\
&\implies e^x \geqslant (x-1)(-2x-1)\\
&\qquad \text{car sur }]-\infty\,;\,1[,\quad x-1<0\\
&\implies e^x \geqslant (-2x-1)(x-1)
\end{aligned}$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

5. **a.** La fonction f est :

- continue sur $]-\infty\,;\,1[$ (car dérivable sur cet intervalle) ;
- strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$ (d'après la question **3. b.**) ;
- telle que -2 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{1} f = -\infty$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Comme on a repéré à la question **4. b.** que $f(0) = -1$, on sait que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.

À l'aide de la calculatrice, par balayage, on a :

- $f(0{,}31) \approx -1{,}98 > -2$;
- $f(0{,}32) \approx -2{,}03 < -2$;

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0{,}31 < \alpha < 0{,}32[$.

Ex 3 : Asie – 11 juin 2024 – Sujet 2

Partie A :

1. • Limite en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

Par limite de la somme, on a donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - x\ln(x) = 0$

• Limite en $+\infty$:

$f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par limite de la somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite du produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 2x - 1\times\ln(x) - x\times\dfrac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

4. Déterminons le signe de $2x-1$:

$$\begin{aligned}
2x-1>0 &\iff 2x>1\\
&\iff x>\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\times\dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$

On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variations de f'	$\|\|$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Déterminons le signe de $x-1$:

$x-1>0 \iff x>1$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de g	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $f(x)=x \iff x=x^2-x\ln(x)$

$$\begin{aligned}
&\iff 0=x^2-x-x\ln(x)\\
&\iff 0=x(x-1-\ln(x))\\
&\iff 0=x-1-\ln(x) \quad \text{car } x>0 \quad \text{donc } x\neq 0\\
&\iff 1=x-\ln(x)\\
&\iff 1=g(x)\\
&\iff x=1
\end{aligned}$$

L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$, cette solution est $x=1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Initialisation : Calculons u_1. $u_1=f(u_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\ln(2)}{2}\approx 0,597$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n=0$, on a bien : $\dfrac{1}{2}\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, tel que $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1 \implies f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(1)$

car f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\implies f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$

car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)

$\implies \dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1.$

2. On a notamment :

- $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.
- $\forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\dfrac{1}{2}\leqslant \ell\leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1}=f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell=1$.

Ex 4 : Métropole – 19 juin 2024 – Sujet 1 – Secours - Ex 3

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$,

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. a. En posant $u(x)=x^2+1$ et avec $u'(x)=2x$, on obtient :

$[\ln(u)]'=\dfrac{u'}{u}$ donc $[\ln(x^2+1)]'=\dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc :

pour tout nombre réel x, $f'(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

b. Pour tout réel x, on a $x^2\geqslant 0$ donc $x^2+1\geqslant 1$ donc $x^2+1>0$.

Comme $(x-1)^2\geqslant 0$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$, on a par quotient $f'(x)\geqslant 0$: la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel $x>0$n on a :

$f(x)=x-\ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=x-\ln(x^2)-\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=x-2\ln(x)-\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x^2}=1$, puis par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$.
- $x-2\ln(x)=x\left(1-2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

  On sait (puissances comparées) que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x-2\ln(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 7\\ u_{n+1}=f(u_n) &=& u_n-\ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}\end{array}\right.$$

1. Soit la propriété « $u_n\geqslant 0$ ».

   Initialisation On a $u_0=7\geqslant 0$: la propriété est vraie au rang 0;

   Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$, tel que $u_n\geqslant 0$: la fonction f étant croissante on a donc $u_n\geqslant 0\Rightarrow f(u_n)\geqslant f(0)$; or $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(0)=0$, donc $u_{n+1}\geqslant 0$.

   Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n\in\mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n\geqslant 0$, quel que soit $n\in\mathbb{N}$.
2. De la relation de récurrence : $u_{n+1}=u_n-\ln\left(u_n^2+1\right)$ on déduit :

   $u_{n+1}-u_n=-\ln\left(u_n^2+1\right)$.

   $u_n^2\geqslant 0\Rightarrow u_n^2+1\geqslant 1\Rightarrow\ln\left(u_n^2+1\right)\geqslant\ln(1)0$ par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^*$.

   $\ln(1)=0$ donc $\ln\left(u_n^2+1\right)\geqslant 0$ et donc $-\ln\left(u_n^2+1\right)\leqslant 0$.

   On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0\iff u_{n+1}\leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro; d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell\geqslant 0$.
4. La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la relation de récurrence donne par limite en plus l'infini :

   $\ell=\ell-\ln\left(\ell^2+1\right)\iff\ln\left(\ell^2+1\right)=0\iff\ell^2+1=1\iff\ell^2=0\iff\ell=0$
5. **a.** On complète le script ci-dessous écrit en langage Python : afin qu'il

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
  n = 0
  u = 7
  while u > h :
    n = n + 1
    u = u - ln(u**2+1)
  return n
```

b. La calculatrice donne $u_{96}\approx 0{,}01003$ et $u_{97}\approx 0{,}0099$

Le programme Python renverra la valeur 97; à partir du 98e les termes seront inférieurs à un centième.

Partie C : calcul intégral

1. f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, donc, pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant f(0)$.
   Or $f(0)=0$ donc $f(x)\geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Soit l'intégrale : $I=\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   f étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2;4]$, donc I est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x=2$ et $x=4$.
3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x\in[2\,;\,4]$, on a l'encadrement : $0{,}5x-1\leqslant f(x)\leqslant 0{,}25x+0{,}25$.

Sur l'intervalle $[2;4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :

$$0{,}5x-1\leqslant f(x)\leqslant 0{,}25x+0{,}25\Longrightarrow\int_2^4(0{,}5x-1)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_2^4(0{,}25x+0{,}25)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_2^4\leqslant I\leqslant\left[\frac{x^2}{8}+0{,}25x\right]_2^4$$

$$\Longrightarrow 4-4-(1-2)\leqslant I\leqslant 2+1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 1\leqslant I\leqslant 2$$

Ex 5 : Métropole – 19 juin 2024 – Sujet 1 – Secours - Ex 4

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

a. Affirmation 1 : « La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. »

La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

Or, d'après le tableau de variations de f, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Affirmation 1 fausse

b. Affirmation 2 : « $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x) - 5} = +\infty$. »

D'après le tableau de variations de f, celle-ci est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$, donc sur cet intervalle $f(x) < 5$ et donc $f(x) - 5 < 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$, on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 5 = 0^-$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x) - 5} = -\infty$ et enfin $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x) - 5} = -\infty$.

Affirmation 2 fausse

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Affirmation 3 : « Le point $\mathrm{A}\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. »

La fonction g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1 - x)$, qui est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$g''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x - 2)$.

On a $g''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{-x}(x - 2) \iff x - 2 = 0$, puisque $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc la dérivée seconde ne s'annule qu'en $x = 2$.

Comme $g(2) = 2\,\mathrm{e}^{-2} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$ et comme $g''(x)$ a le signe de $(x - 2)$ et donc change de signe (de moins à plus) en 2, le point $\mathrm{A}\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Affirmation 3 vraie

b. Affirmation 4 : « Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a $g(x) \leqslant x$. »

$g(x) \leqslant x \iff x\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x \iff x \leqslant x\,\mathrm{e}^{x} \iff 0 \leqslant x\,\mathrm{e}^{x} - x \iff x(\mathrm{e}^{x} - 1) \geqslant 0$

On établit un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{x} - 1$		$-$	0	$+$	
$x(\mathrm{e}^{x} - 1)$		$+$	0	$+$	

Donc, pour tout x de $]-\infty\,;\,2[$, on a $x(\mathrm{e}^{x} - 1) \geqslant 0$ donc $g(x) \leqslant x$.

Affirmation 4 vraie

3. Affirmation 5 : « L'équation $x\ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. »

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - 1$.

$x\ln(x) = 1 \iff x\ln(x) - 1 = 0 \iff f(x) = 0$

- La fonction f est dérivable et $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 0 = \ln(x) + 1$.
- $f'(x) > 0 \iff \ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1}) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$

D'où le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur l'intervalle $]0\,;\ \mathrm{e}^{-1}[$, la fonction f est négative, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur l'intervalle $]\,\mathrm{e}^{-1}\,;\ +\infty[$, la fonction f, continue et strictement croissante, passe du négatif au positif : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

Affirmation 5 fausse

Ex 6 : Métropole – 19 juin 2024 – Sujet 2 – Dévoilé

Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** On lit $f(0) = 2$.

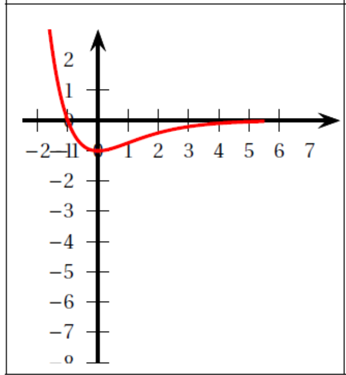
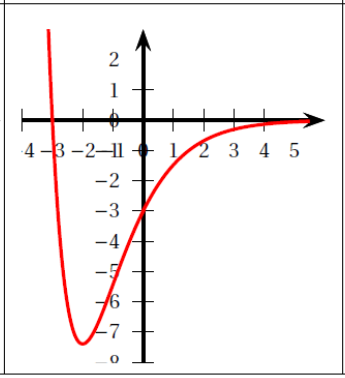
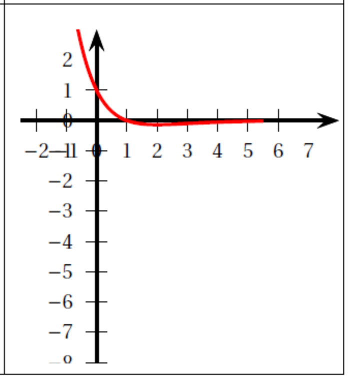
   b. Déterminer $f'(0)$. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP) soit à $\dfrac{0-2}{2-0} = -1 = f'(0)$

2. Il semble que $f(-2) = 0$. $S = \{-2\}$.

3. Il semble que la fonction est convexe sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$: sur cet intervalle toutes les tangentes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sont sous cette courbe.

   Toujours graphiquement sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe (-1 et 0 au voisinage de plus l'infini) sont croissants : autrement dit la fonction f" est croissante donc $f''(x) \geqslant 0$

4.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

- On sait que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\ +\infty[$, donc une primitive sur le même intervalle est croissante ce qui élimine la courbe 3 ;
- Si F est une primitive de f et est représentée par la courbe 1, alors $F'(0) = 0 = f(0) = -1$: ceci est faux donc la courbe 1 est éliminée.

Il ne reste que la courbe 2.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

1. On a vu que $f(0) = 2 \iff b\mathrm{e}^{\lambda\times 0} = 2 \iff b = 2$.

   Donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

2. On a donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

   On sait aussi que $f(-2) = 0 \iff (-2a+2)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0$ et comme $\mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0$ on a donc $-2a+2 = 0 \iff a = 1$.

   Donc $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

3. On a vu que $f'(0) = -1$

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda(x+2)\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(1+\lambda x+2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

   Donc $f'(0) = -1 \iff 1+2\lambda = -1 \iff 2\lambda = -2 \iff \lambda = -1$.

   On a donc finalement $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x-2) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de $f('x)$ est donc celui de $-x-1$.

• $-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$: sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur cet intervalle ;

• $-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$: sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur cet intervalle ;

• $-x-1 = 0 \iff -1 = x$, $f'(1) = 0$; $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
Il reste à calculer la liite en plus l'infini : comme $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (puissances comparées) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. **a.** f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de x, donc :

- f est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$;

b. – Donc d'après le résultat précédent la courbe $\mathscr{C}_f$ a un seul point d'inflexion de coordonnées $(0\,;\,2)$.

4.

$$I(t) = \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

a. On pose $u(x) = x+2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables on peut intégrer par parties :

$I(t) = [-(x+2)\mathrm{e}^{-x}]_{-2}^{t} + \displaystyle\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} = \left[(-x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} =$
$(-t-3)\mathrm{e}^{-t} + 1\mathrm{e}^{2} = \mathrm{e}^{2} - (t+3)\mathrm{e}^{-t}$.

b. f est positive sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$; on sait qu'alors l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = t$ est égale à l'intégrale $I(t)$.

Or quand $t \to +\infty$, la surface n'est pas limitée à droite alors que l'intégrale l'est elle puisqu'on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (t+3)\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(t) = \mathrm{e}^{2}$.