Ex 1 : Étude de Fonctions Logarithmes

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$.

1) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $\forall x > 0,\ \ f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

3) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \end{cases}$

1) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3) En déduire la convergence de la suite (u_n).
4) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
5) a) Compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où $h > 0$.

```
from math import log as ln
def seuil(h):
    n = 0
    u =7
    while ... :
        n=n+1
        u=...
    return n
```

   b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1) Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2) Interpréter graphiquement l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3) On admet $\forall x \in [2\,;\,4],\ \ 0,5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x + 0,25$
   En déduire l'encadrement : $1 \leqslant I \leqslant 2$.

Ex 2 : Équations Différentielles & Fonctions Exponentielles

Partie A

Soit l'équation différentielle sur $[0\,;+\infty[$: (E) : $y' + \dfrac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1) Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation (E).
2) Soit l'équation différentielle (E′) : $y' + \dfrac{1}{4}y = 0$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E′).
3) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (20x+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1) a) Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18 - 5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

   b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

   a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle [14 ; 15].

   b) Compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution ci-contre, écrite en langage Python

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14.5				
$f(m)>8$	Faux				

```
from math import exp
def f(x):
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution():
    a,b=14,15
    while b-a>0.1 :
        m=(a+b)/2
        if f(m)>8:
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
```

c) Quel est l'objectif de la fonction solution dans le contexte de la question ?

Ex 3 : QCM & Vrai-Faux sur des thèmes divers

1) La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ est donnée ci-dessous :

Un encadrement de l'intégrale :

$$I=\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est :}$$

a) $0\leqslant I\leqslant 4$ c) $5\leqslant I\leqslant 10$

b) $1\leqslant I\leqslant 5$ d) $10\leqslant I\leqslant 15$

2) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse. On se justifiera.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-x^2+2}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

3) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse. On se justifiera.

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1-2\mathrm{e}^{-1}$$

4) Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher.
L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges.
L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.
Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte. La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{8}$

5)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$.
Une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est définie par :

a) $F(x)=\frac{x^2}{2}e^x$ c) $F(x)=(x+1)e^x$

b) $F(x)=(x-1)e^x$ d) $F(x)=\frac{2}{x}e^{x^2}$.

6)

Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{a}{b+e^{-t}}$ où $a,b\in\mathbb{R}$.

On sait que $g(0)=2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=3$.

Les valeurs de a et b sont :

a) $a=2$ et $b=3$ c) $a=4$ et $b=1$

b) $a=4$ et $b=\frac{4}{3}$ d) $a=6$ et $b=2$
