Tale spé maths **Bac Blanc – Fonctions – EDL -Intégrales – Suites – Corrigé**

Ex 1 : étude de fonctions logarithmes

Partie A

1) a) $f(x)=x-\ln(x^2+1)$ donc $f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

1) b) $f'(x)=0$ donne $(x-1)^2=0$ donc $x=1$

le signe de $f'(x)$dépend du signe de $(x-1)^2$; on déduit le tab de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $x-2\ln(x)-\ln(1+\frac{1}{x^2})=x-\ln(x^2)-\ln(\frac{x^2+1}{x^2})$

$=x-\ln(x^2(\frac{x^2+1}{x^2}))=x-\ln(x^2+1)=f(x)$ pour tout $x>0$

3) on déduit que $f(x)=x(1-\frac{2\ln(x)}{x})-\ln(1+\frac{1}{x^2})$

or $\lim\limits_{+\infty}(\frac{\ln(x)}{x})=0$ et $\lim\limits_{+\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1$ donc $\lim\limits_{+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x^2}))=0$

on déduit ainsi que $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$

Partie B

$u_0=7$ et $u_{n+1}=f(u_n)$pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) on pose la relation P_n : « $\forall n\in\mathbb{N} : u_n\geqslant 0$ » ; preuve par récurrence

Initialisation : $u_0=7\geqslant 0$ donc P_0 est vraie

Hérédité : on suppose que P_n est vraie pour un certain rang n
donc $u_n\geqslant 0$; or f est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $f(u_n)\geqslant f(0)$
soit encore $u_{n+1}\geqslant 0$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n\geqslant 0$

2) $u_{n+1}-u_n=-\ln(u_n^2+1)$; or $u_n^2+1\geqslant 1$ donc $\ln(u_n^2+1)\geqslant\ln(1)$
donc $-\ln(u_n^2+1)\leqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$
on déduit que la suite (u) est décroissante

3) d'après le th de CV monotone puisque la suite (u) est décroissante et minorée par 0 on déduit que la suite (u) est convergente vers $L\geqslant 0$

4) d'après le th du point fixe L vérifie $f(L)=L$
donc $L=L-\ln(L^2+1)$donc $\ln(L^2+1)=0$ donc $\ln(L^2+1)=\ln(1)$
donc $L^2+1=1$ donc $L=0$

5) a) le script Python est :

```python
from math import log as ln
def seuil(h):
    n=0
    u=7
    while (u>h):
        n=n+1
        u=u-ln(u**2+1)
    return n
```

5) b) on obtient alors :

```python
>>> seuil(0.01)
97
```

Partie C

1) on sait que f est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $x\geqslant 0$ implique $f(x)\geqslant f(0)$
or $f(0)=0$ donc pour tout x positif, $f(x)$ est positive

2) l'intégrale I représente ainsi l'aire de la partie du plan délimité par la courbe C_f, l'axe (Ox), les droites d'équations $x=2$ et $x=4$

3) on admet que sur $[2;4]$: $0{,}5x-0{,}25\leqslant f(x)\leqslant 0{,}25x+0{,}25$

donc $\int_2^4(0{,}25x-0{,}25).dx\leqslant\int_2^4 f(x).dx\leqslant\int_2^4(0{,}25x+0{,}25).dx$

donc $[\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}]_2^4\leqslant I\leqslant[\frac{x^2}{8}+\frac{x}{4}]_2^4$

donc $(1)-(0)\leqslant I\leqslant(3)-(1)$

donc $1\leqslant I\leqslant 2$

on vérifie avec la calculatrice $I\simeq 1{,}4487$