Tale spé maths **Bac Blanc – Fonctions – EDL -Intégrales – Suites – Corrigé**

Ex 2 : étude de fonctions logarithmes

Partie A

Soit l'EDL1 $(E): y'+0{,}25\,y=20\,e^{-0{,}25x}$ avec $x\geqslant 0$

1) on pose une solution particulière de (E) : $g(x)=ax\,e^{-0{,}25x}$

donc $g'(x)=a\,e^{-0{,}25x}+(ax)(-0{,}25)\,e^{-0{,}25x}=(-0{,}25\,a\,x+a)\,e^{-0{,}25x}$

g est solution de (E) donc $g'(x)+0{,}25\,g(x)=20\,e^{-0{,}25x}$

donc $(-0{,}25\,ax+a)\,e^{-0{,}25x}+0{,}25(ax)\,e^{-0{,}25x}=20\,e^{-0{,}25x}$

donc $-0{,}25\,ax+a+0{,}25\,ax=20$ donc $a=20$ donc $g(x)=20\,x\,e^{-0{,}25x}$

2) D'après le th de Cauchy-Lipschitz les solutions générales de (E) sont les fonctions $y(x)=k\,e^{-0{,}25x}$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) on déduit toutes les solutions de (E) : $f(x)=(20\,x+k)\,e^{-0{,}25x}$

4) si $f(0)=8$ alors $k\,e^{0}=8$ donc $k=8$ donc $f(x)=(20\,x+8)\,e^{-0{,}25x}$

Partie B

on pose la fonction $f(x)=(20\,x+8)\,e^{-0{,}25x}$ avec $x\geqslant 0$; on admet que $\lim\limits_{+\infty} f(x)=0$

1) a) $f'(x)=(-0{,}25\times 20\,x-0{,}25\times 8+20)\,e^{-0{,}25x}=(18-5\,x)\,e^{-0{,}25x}$

1) b) $f'(x)$ est du signe de $18-5\,x$ donc on obtient le tab de variations

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	8	$\nearrow$	$80\cdot e^{-\frac{9}{10}}$	$\searrow$	0

2) a) on sait que sur l'intervalle $[14\,;15]$ la fonction f est strict décroissante et continue ; de plus $f(14)>8$ et $f(15)<8$; d'après le th des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=8$ possède une solution unique $\alpha\simeq 14{,}46$

2) b) on complète le tableau → Méthode par dichotomie (laissé au lecteur)

2) c) l'objectif est de déterminer le seuil où la fonction sera inférieure à 8 unités

Tale spé maths **Bac Blanc – Fonctions – EDL -Intégrales – Suites – Corrigé**

Ex 2 : étude de fonctions logarithmes

Partie A

Soit l'EDL1 $(E): y'+0{,}25\,y=20\,e^{-0{,}25x}$ avec $x\geqslant 0$

1) on pose une solution particulière de (E) : $g(x)=ax\,e^{-0{,}25x}$

donc $g'(x)=a\,e^{-0{,}25x}+(ax)(-0{,}25)\,e^{-0{,}25x}=(-0{,}25\,a\,x+a)\,e^{-0{,}25x}$

g est solution de (E) donc $g'(x)+0{,}25\,g(x)=20\,e^{-0{,}25x}$

donc $(-0{,}25\,ax+a)\,e^{-0{,}25x}+0{,}25(ax)\,e^{-0{,}25x}=20\,e^{-0{,}25x}$

donc $-0{,}25\,ax+a+0{,}25\,ax=20$ donc $a=20$ donc $g(x)=20\,x\,e^{-0{,}25x}$

2) D'après le th de Cauchy-Lipschitz les solutions générales de (E) sont les fonctions $y(x)=k\,e^{-0{,}25x}$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) on déduit toutes les solutions de (E) : $f(x)=(20\,x+k)\,e^{-0{,}25x}$

4) si $f(0)=8$ alors $k\,e^{0}=8$ donc $k=8$ donc $f(x)=(20\,x+8)\,e^{-0{,}25x}$

Partie B

on pose la fonction $f(x)=(20\,x+8)\,e^{-0{,}25x}$ avec $x\geqslant 0$; on admet que $\lim\limits_{+\infty} f(x)=0$

1) a) $f'(x)=(-0{,}25\times 20\,x-0{,}25\times 8+20)\,e^{-0{,}25x}=(18-5\,x)\,e^{-0{,}25x}$

1) b) $f'(x)$ est du signe de $18-5\,x$ donc on obtient le tab de variations

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	8	$\nearrow$	$80\cdot e^{-\frac{9}{10}}$	$\searrow$	0

2) a) on sait que sur l'intervalle $[14\,;15]$ la fonction f est strict décroissante et continue ; de plus $f(14)>8$ et $f(15)<8$; d'après le th des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=8$ possède une solution unique $\alpha\simeq 14{,}46$

2) b) on complète le tableau → Méthode par dichotomie (laissé au lecteur)

2) c) l'objectif est de déterminer le seuil où la fonction sera inférieure à 8 unités