Ex 1 : géométrie dans l'Espace

on donne la droite (d) définie par le système : $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-1 \\ z=2-6t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

on pose $A(3;-3;-2)$, $B(5;-4;-1)$, $C(2;-1;-1)\in(d)$,

$H\in(P): x+3z-7=0$ avec $(BH)\perp(P)$

Affirmation 1 : la droite (d) et l'axe (Oy) ne sont pas coplanaires

l'axe (Oy) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=0 \\ y=k \\ z=0 \end{cases}, k\in\mathbb{R}$

il est évident que (d) et (Oy) ne sont pas parallèles (vect-dir non colinéaires)

étudions l'intersection éventuelle des droites (d) et (Oy)

soit $M(x;y;z)\in(d)\cap(Oy)$ alors : $\begin{cases} x=3-2t=0 \\ y=-1=k \\ z=2-6t=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t=1{,}5 \\ k=-1 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

cela est impossible donc (d) et (Oy) ne sont pas coplanaires → **VRAI**

Affirmation 2 : le plan (P') passant par A et orthogonal à (d) a pour équation cartésienne : $x+3z+3=0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ est directeur de (d) or $(d)\perp(P')$ donc $\vec{u}$ est normal à (P') donc une équation cartésienne de (P') est : $1x+0y+3z+d=0$

de plus $A\in(P')$ donc $1\times3+0\times(-3)+3\times(-2)+d=0$ donc $d=3$

on déduit l'équation cartésienne de $(P'): x+3z+3=0$ → **VRAI**

Affirmation 3 : l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\dfrac{\pi}{6}$ radians

on sait que $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$ avec $A(3;-3;-2)$, $B(5;-4;-1)$

et $C(2;-1;-1)$ on déduit les coordonnées de C avec le paramètre $t=0{,}5$

donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2-2+1=-3$

et $AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$, $AC=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

donc $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{-3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{-1}{2}$ donc $\widehat{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ → **FAUX**

Affirmation 4 : la distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

on a $B(5;-4;-1)$, $H\in(P): x+3z-7=0$ avec $(BH)\perp(P)$

calculons les coordonnées du point H :

la droite (d') passant par B et orthogonale à (P) coupe le plan (P) en H

une représentation paramétrique de (d') est : $\begin{cases} x=5+p \\ y=-4 \\ z=-1+3p \end{cases}, p\in\mathbb{R}$

les coordonnées de H vérifient ainsi le système : $\begin{cases} x=5+p \\ y=-4 \\ z=-1+3p \\ x+3z-7=0 \end{cases}$

donc on déduit $(5+p)+3(-1+3p)-7=0$ donc $p=\dfrac{1}{2}$

on déduit alors $H\left(\dfrac{11}{2};-4;\dfrac{1}{2}\right)$

enfin on obtient : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ donc $BH=\sqrt{\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{10}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ → **VRAI**
