**Tale spé maths** **Bac Blanc – Suites – Espace - Probabilités – Corrigé**

***Ex 2*** : suites numériques

soit la suite $(u)$ définie par $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ et $u_0=2$

1) on a $u_1=\dfrac{2u_0+1}{u_0+2}=\dfrac{5}{4}$

2) a) on pose $a_n=\dfrac{u_n}{u_n-1}$ pour tout entier naturel $n$

donc $a_0=\dfrac{u_0}{u_0-1}=\dfrac{2}{2-1}=2$ et $a_1=\dfrac{u_1}{u_1-1}=\dfrac{1{,}25}{1{,}25-1}=5$

2) b) $a_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}=\dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1}=\dfrac{2u_n+1}{2u_n+1-(u_n+2)}=\dfrac{2u_n+1}{u_n-1}$

d'autre part $3a_n-1=3\left(\dfrac{u_n}{u_n-1}\right)-1=\dfrac{3u_n}{u_n-1}-1=\dfrac{3u_n-u_n+1}{u_n-1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n-1}$

on vérifie bien que $a_{n+1}=3a_n-1$ pour $n\geqslant 0$

2) c) on pose la relation $(P_n)$ : « $\forall n\in\mathbb{N}^*$ : $a_n\geqslant 3n-1$ » → récurrence

*Initialisation* : $a_1=5$ et $a_1\geqslant 2$ donc ($P_1$) est vraie

*Hérédité* : on suppose qu'il existe un rang $n$ tel que $P_n$ soit vraie

donc $a_n\geqslant 3n-1$ donc $3a_n\geqslant 9n-3$ donc $3a_n-1\geqslant 9n-4$

donc $a_{n+1}\geqslant(3n+2)+6n-6$ donc $a_{n+1}\geqslant(3n+2)+6(n-1)$

donc $a_{n+1}\geqslant 3n+2$ car $n\geqslant 1$ donc $n-1\geqslant 0$ (on minore par 0)

donc on déduit que $a_{n+1}\geqslant 3(n+1)-1$donc $P_{n+1}$ est vraie

Conclusion : pour tout $n\geqslant 1$ : $a_{n+1}\geqslant 3n-1$

2) d) il est évident que $\lim\limits_{+\infty}(3n-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty}(a_n)=+\infty$ par majoration

3) a) on sait que $a_n=\dfrac{u_n}{u_n-1}$ donc $a_n(u_n-1)=u_n$ donc $a_n.u_n-a_n=u_n$

donc $a_n.u_n-u_n=a_n$ donc $u_n(a_n-1)=a_n$ donc $u_n=\dfrac{a_n}{a_n-1}$

3) b) on déduit que $u_n=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a_n}}$ en divisant par $a_n\neq 0$

or $\lim\limits_{+\infty}(a_n)=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{1}{a_n}\right)=0$ donc on déduit $\lim\limits_{+\infty}(u_n)=\dfrac{1}{1-0}=1$

4) a) on admet que la suite $(u)$ est décroissante

le *script Python* permet de renvoyer le rang $n$ et le terme $u_n$ pour lequel $u_n\leqslant 1+p$ ($p$ est alors un seuil d'approche de la limite 1)

```python
from math import *
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while (u>1+p):
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return n,u
```

4) b) on teste ce script pour $p=0{,}001$ et on obtient

```
>>> algo(0.001)
(6, 1.000914913083257)
```

ainsi à partir du rang $n=6$ la suite $(u)$ s'approche de sa limite 1 avec un « *epsilon* » de moins de 0,001

-----------------------------------------------------------------------------------------