Ex 1 : Amérique du Nord 21mai 2024 – Sujet 1

Cet exercices est un QCM – justifier brièvement chaque question

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).

   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   a. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3+t \\ y & = & 1 \\ z & = & -3+3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **b.** $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+4t \\ y & = & t \\ z & = & 3 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

   c. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+3t \\ y & = & t \\ z & = & 3-3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **d.** $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 4+t \\ y & = & 1 \\ z & = & 3-3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

   On considère la droite (d) de représentation paramétrique

   $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3+4t \\ y & = & 6t \\ z & = & 4-2t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

   a. M(7 ; 6 ; 6) **b.** N(3 ; 6 ; 4) **c.** P(4 ; 6 ; −2) **d.** R(−3 ; −9 ; 7)

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique

   $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -2+3k \\ y & = & -1-2k \\ z & = & 1+k \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{R}$

   Les droites (d) et (d') sont :

   a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point I(2 ; 1 ; 0) et perpendiculaire à la droite (d).

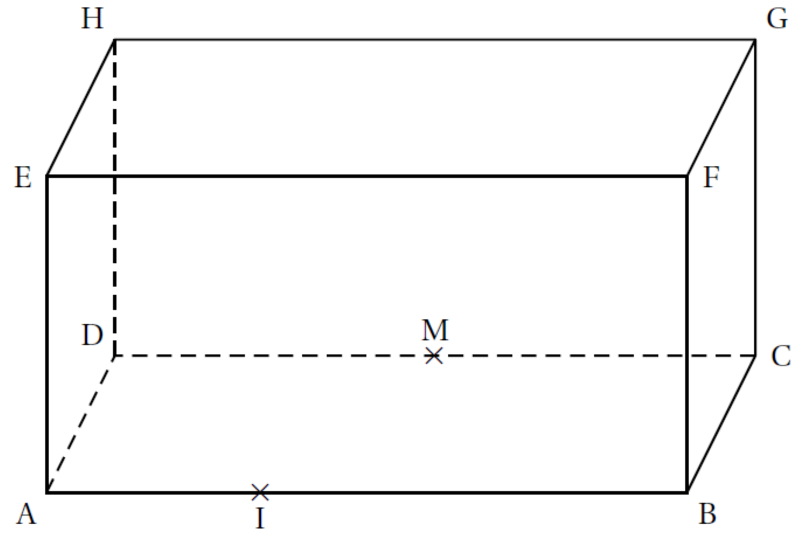
   Une équation du plan (P) est :

   a. $2x+3y-z-7=0$ **b.** $-x+y-4z+1=0$

   c. $4x+6y-2z+9=0$ **d.** $2x+y+1=0$

Ex 2 : Amérique du Nord - 22mai 2024 – Sujet 2

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci dessous.



On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].

On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

   $$2x+6y+3z-9=0.$$

   c. Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x+15y-3z+7=0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).

   Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3 ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Ex 3 : Centres étrangers1 5 juin 2024 – Sujet 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère :

- les points $A(-2 ; 0 ; 2)$, $B(-1 ; 3 ; 0)$, $C(1 ; -1 ; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+3s \\ y & = & -1-5s \\ z & = & 2-6s \end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
   $$x+3y+5z-8=0.$$
   c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
3. **a.** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
   On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

   b. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4. **a.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

   b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   Arrondir le résultat au centième.

Ex 4 : Asie 11 juin 2024 – Sujet 2

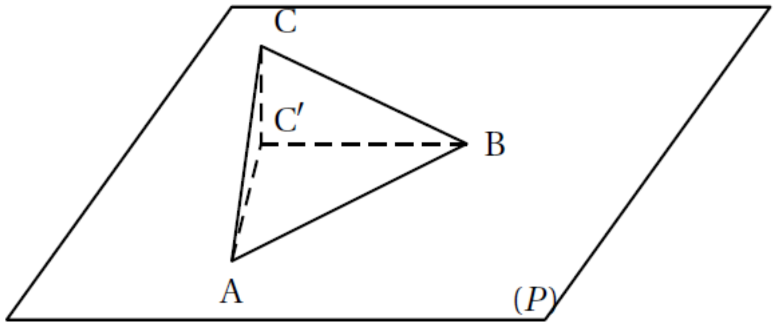
Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :
$$(P): \quad 2x+2y-3z+1=0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :
$$A(1; 0; 1)\ ,\ B(2 ; -1 ; 1) \text{ et } C(-4 ; -6 ; 5)\ .$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $C'(0 ; -2 ; -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
   $\left\{\begin{array}{l} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{array}\right.$
   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\-\frac{11}{2}\\4\end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. **a.** Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.

   b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.

   c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Ex 5 : Métropole 20 juin 2024 – Sujet 2

Cet exercices est un QCM – justifier brièvement chaque question

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2;0;0),\quad B(0;4;3),\quad C(4;4;1),\quad D(0;0;4)\quad \text{et}\quad H(-1\,;1\,;2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Ex 6 : Polynésie 19 juin 2024 – Sujet 1

Cet exercices est un QCM – justifier brièvement chaque question

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\,;1\,;-1),\quad B(-1\,;2\,;1)\text{ et }\quad C(5\,;0\,;-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+5y-2z+3=0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x&=&-t+3\\ y&=&t+2\\ z&=&2t+1\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment [BC], noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x-y-2z-7=0.$$

Ex 7 : Polynésie 20 juin 2024 – Sujet 2

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées (2 ; 5 ; 1).

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points $A(-1\,;-1\,;17)$, $B(4\,;-2\,;4)$ et $C(1\,;-3\,;7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).
   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x-3y+z-18=0$.
3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par

$$d:\left\{\begin{array}{rcl} x&=&3t+2\\ y&=&t+5\\ z&=&4t+1\end{array}\right.,\text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

   a. Déterminer un vecteur directeur de la droite d.
   b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$.
4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$.
   On admet que le point $F(6\,;-1\,;3)$ correspond à cet emplacement.
   Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.
5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D.
   Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 $m.s^{-1}$, le nouveau drone peut-il arriver à temps?