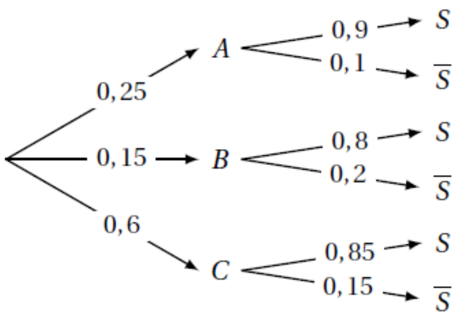
Ex 1 : Amérique du Nord 21mai 2025 – Sujet 1

Partie A

1. Puisqu'on s'intéresse à une connexion au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions annoncées dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

   Cela donne l'arbre pondéré ci-dessous :



2. La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est $P(S\cap B)$.

   $P(S\cap B) = P(B)\times P_B(S) = 0,15\times 0,8 = 0,12$.

3. De même :

   $P\left(C\cap\overline{S}\right) = P(C)\times P_C\left(\overline{S}\right) = 0,6\times 0,15 = 0,09$.

   Cela signifie que 9 % des connexions à distance de l'entreprise sont des connexions transitant via le serveur C et qui sont instables.

4. Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

   $$\begin{aligned}P(S) &= P(A)\times P_A(S)+P(B)\times P_B(S)+P(C)\times P_C(S)\\ &= 0,25\times 0,9+0,15\times 0,8+0,6\times 0,85\\ &= 0,225+0,12+0,51\\ &= 0,855\end{aligned}$$

   La probabilité de l'évènement S est donc bien $P(S) = 0,855$.

5. La probabilité demandée est $P_S(B)$. Par définition, on a :

   $P_S(B) = \dfrac{P(S\cap B)}{P(S)} = \dfrac{0,12}{0,855} = \dfrac{8}{57} \approx 0,1403$.

   La probabilité que la connexion ait transité par le serveur B, sachant qu'elle est stable est d'environ 0,140, au millième près.

Partie B

1. a. Les éléments suivants ne sont pas nécessaires, puisqu'on admet que X suit une loi binomiale :

   - Chaque connexion est vue comme une expérience aléatoire à deux issues : le succès « la connexion est instable », de probabilité p
     $p = P\left(\overline{S}\right) = 1-0,855 = 0,145$;
   - cette épreuve est répétée $n = 50$ fois, de façon supposée identique et indépendante, puisque la constitution de l'échantillon est réputée assimilable à un tirage avec remise;
   - X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de connexions instables, sur ces 50 répétitions.

   Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

   b. La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $P(X\leqslant 8)$.

   Avec la calculatrice, on a : $P(X\leqslant 8)\approx 0,7044$, donc la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est 0,704 arrondie au millième.

2. a. Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$, pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on aura :

   $P(X_n = k) = \dbinom{n}{k}\times 0,145^k\times 0,855^{n-k}$.

   L'évènement « au moins une connexion de cet échantillon est instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion de cet échantillon n'est instable », autrement dit $\{X = 0\}$.

   Ainsi : $p_n = 1-P(X_n = 0) = 1-\dbinom{n}{0}\times 0,145^0\times 0,855^{n-0} = 1-0,855^n$.

   b. Résolvons, pour n entier naturel :

   $$\begin{aligned}p_n\geqslant 0,99 &\iff 1-0,855^n\geqslant 0,99\\ &\iff -0,855^n\geqslant -0,01\\ &\iff 0,855^n\leqslant 0,01 \quad \text{car } -1<0\\ &\iff \ln\left(0,855^n\right)\leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\ &\iff n\ln(0,855)\leqslant \ln(0,01)\\ &\iff n\geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \quad \text{car } 0,855<1 \text{ donc } \ln(0,855)<0\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)}\approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = 30$ que l'on a une probabilité p_n supérieure ou égale à 0,99.

3. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,145$, alors l'espérance de X_n est, par propriété : $E(X_n) = np = 0,145n$.

On a ensuite $F_n = \frac{1}{n} \times X_n$,

donc, par linéarité de l'espérance : $E(F_n) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0,145n = 0,145$.

On admet que $V(F_n) = \frac{0{,}123\,975}{n}$.

b. Écrivons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la moyenne empirique F_n, avec une précision $t = 0,1$:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(F_n)}{t^2} \Longrightarrow P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{\frac{0{,}123\,975}{n}}{0,1^2}$$
$$\Longrightarrow P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{0{,}123\,975}{n} \times \frac{1}{0,01}$$
$$\Longrightarrow P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{12,3975}{n}$$
$$\Longrightarrow P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{12,5}{n}$$

car $12{,}3975 < 12{,}5$

On a donc bien l'inégalité annoncée.

c. Si on étudie un échantillon de 1 000 connexions et que l'on constate que pour cet échantillon $F_{1\,000} = 0,3$, alors on a $0,3 - 0,145 = 0,155$: cette conduite de l'expérience réalise l'évènement $\left\{|F_{1\,000} - 0,145| \geqslant 0,1\right\}$.

D'après la question précédente, la probabilité de cet évènement est inférieure ou égale à $\frac{12,5}{1\,000} = 0{,}0125$, il est donc hautement probable que les serveurs dysfonctionnent, car si la modélisation (basée sur un fonctionnement normal des serveurs) est fiable, une telle fréquence est très peu probable.

Ex 2 : Amérique du Nord - 22mai 2025 – Sujet 2

Partie A

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. L'épreuve est effectuée 15 fois de façon indépendante et à chaque lancer la probabilité de marquer est égale à $0,32$. N suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(15\,;\,0,32)$.

2. La probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers est :

$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{15-4} \approx 0,206$ au millième près.

3. La probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers est :

$P(N \leqslant 6) = P(N = 0) + P(N = 1) + \ldots + P(N = 6) \approx 0,828$ (calculatrice).

4. On sait que : $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$.

Donc en moyenne sur 150 lancers, Victor marque 48 paniers.

5. **a.** Chaque lancer étant à 3 points, on a donc $T = 3N$.

b. On a $E(T) = E(3N) = 3E(N)$ d'après la linéarité de l'espérance, soit $E(T) = 3 \times 4,8 = 14,4$, donc une moyenne de 144 points marqués sur 150 lancers.

c. On a $P(12 \leqslant T = 3N \leqslant 18) = P(4 \leqslant N \leqslant 6)$.

Cette probabilité est égale à :

$P(4 \leqslant N \leqslant 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167$, soit

$$P(12 \leqslant T \leqslant 18) \approx 0,586.$$

Partie B

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

a. M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, des points marqués par Victor

b. • Chaque variable $X_1, \ldots, X_{50}$ suit la même loi que X donc on a :
$E(M_{50}) = E(X) = 22$;

• Comme les variables X_1, X_2,... X_50 sont indépendantes, on en déduit :
$V(M_{50}) = \frac{1}{50}V(X) = \frac{1}{50} \times 65 = \frac{65}{50} = \frac{130}{100} = 1,3$.

c. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, pour tout réel $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

donc ici : $P(|M_{50} - E(M_{50})| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(M_{50})}{3^2}$

Comme $\frac{V(M_{50})}{3^2} = \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}$, on a bien : $P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{13}{90}$.

d. L'événement « $19 < M_{50} < 25$ » revient à $|M_{50} - 22| < 3$ et
$P\left(|M_{50} - 22| < 3\right) = 1 - P\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right)$.
Soit $P\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{13}{90}$ entraîne $P\left(19 < M_{50} < 25\right) \geqslant 1 - \dfrac{13}{90} = \dfrac{77}{90} \approx 0,856$: cette probabilité est bien supérieure à 0,85.

2. D'après la loi faible des grands nombres, $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geqslant t\right) = 0$,
donc en particulier ici, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|M_n - 22| \geqslant 3\right) = 0$.

donc pour tout $r > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $P\left(|M_n - 22| \geqslant 3\right) < r$ et c'est vrai en particulier pour $r = 0,01$.

L'affirmation est donc fausse.

Autre méthode :

Pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de concentration, on a :

$$P\left(|M_n - E(X)| \geqslant t\right) \leqslant \frac{V(X)}{t^2 n}$$

Pour $t = 3$ on obtient : $P\left(|M_n - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{65}{n \times 3^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{65}{9n} \leqslant 0,01 \iff \dfrac{6500}{9} \leqslant n$

$\iff 722 + \dfrac{2}{9} \leqslant n$

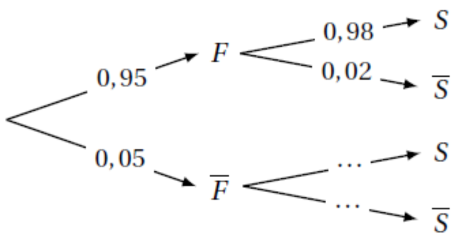
L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 723$.

Ex 3 : Asie 11 juin 2025 – Sujet 1

Partie A

1. D'après l'énoncé 95% des jouets réussissent le test de fabrication et, parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98% réussissent le test de sécurité, donc $P(F) = 0,95$ et $P_F(S) = 0,98$.

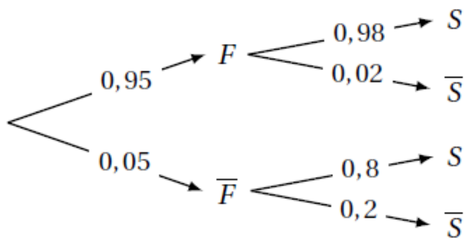
2. **a.** Un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé (ainsi que les probabilités d'évènement contraire, triviales) est :



b. D'après l'énoncé 1% des jouets ne réussissent aucun des deux tests donc $P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right) = 0,01$.

$$P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \frac{P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$$

L'arbre complet est donc :



3. $P\left(F \cap S\right) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$

La probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests est égale à 0,93.

4. Les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P\left(F \cap S\right) + P\left(\overline{F} \cap S\right)$

On a donc : $P(S) = 0,931 + 0,05 \times 0,8 = 0,971$.

La probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut, 0,97 arrondi au centième.

5. $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,931}{0,971} \approx 0,9588$

La probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication sachant qu'il a réussi le test de sécurité vaut 0,96, arrondi au centième.

Partie B

1. S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$ donc :

$E\left(S_n\right) = n \times p = 0,95n$ et $V(X) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n$.

2. Dans cette question, on pose $n = 150$.

a. $P\left(S_{150} = 145\right) = \dbinom{150}{145} \times 0,95^{145} \times 0,05^{150-145}$.

$= 591\,600\,030 \times 0,95^{145} \times 0,05^5$

$\approx 0,10884$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P\left(S_{150} = 145\right) \approx 0,109$

Dans le contexte de l'exercice, dans environ 10,9% des cas, 145 jouets sur les 150 du lot réussissent le test de fabrication.

b. 94% des jouets de ce lot correspond à 141 jouets.

À l'aide de la calculatrice : $P(S_{150} \geqslant 141) \approx 0{,}78088$

La probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication vaut $0,781$ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

a. D'après les propriétés sur l'espérance d'une somme de variables aléatoires :

$E(F_n) = E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{E(S_n)}{n} = \dfrac{0{,}95n}{n} = 0{,}95.$

D'après les propriétés sur la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes :

$V(F_n) = V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{V(S_n)}{n^2} = \dfrac{0{,}0475n}{n^2} = \dfrac{0{,}0475}{n}.$

b. L'évènement « $0{,}93 < F_n < 0{,}97$ » revient à $|F_n - 0{,}95| < 0{,}02$ et

$P\Big(|F_n - 0{,}95| < 0{,}02\Big) = 1 - P\Big(|F_n - 0{,}95| \geqslant 0{,}02\Big).$

On veut que $P\Big(|F_n - 0{,}95| \geqslant 0{,}02\Big) \geqslant 0{,}96$

On veut donc que $P\Big(|F_n - 0{,}95| < 0{,}02\Big) \leqslant 0{,}04$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\Big(|F_n - E(F_n)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{t^2}$

Pour $t = 0{,}02$ on obtient : $P\Big(|F_n - 0{,}95| \geqslant 0{,}02\Big) \leqslant \dfrac{0{,}0475}{n \times 0{,}02^2}.$

Il faut résoudre l'inéquation suivante :

$1 - \dfrac{0{,}0475}{n \times 0{,}02^2} \geqslant 0{,}96 \iff \dfrac{0{,}0475}{n \times 0{,}02^2} \leqslant 0{,}04 \iff n \geqslant \dfrac{0{,}0475}{0{,}04 \times 0{,}02^2}$

$\iff n \geqslant 2969.$

Le lot devra contenir au moins 2969 jouets.

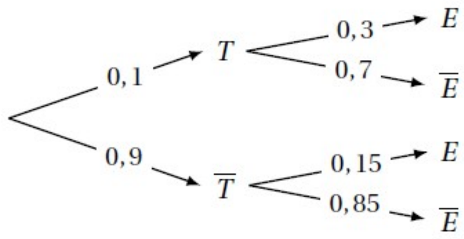
L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 2969$.

À partir de 2969 jouets prélevés, la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à $0,96$.

Ex 4 : Centres étrangers 12 juin 2025 – Sujet 1

Partie A :

1. Un arbre pondéré représentant la situation est :



$P\left(\overline{T} \cap E\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(E) = 0{,}9 \times 0{,}15 = 0{,}135.$

2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P(T \cap E) + P(\overline{T} \cap E)$

On a donc : $P(E) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}135 = 0{,}165.$

La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est égale à $0,165$.

3. $P_E(T) = \dfrac{P(T \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}3}{0{,}165} \approx 0{,}1818.$

La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée vaut environ $0,18$, arrondie au centième.

Partie B : Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}165$.

2. $P(X = 5) = \dbinom{15}{5} \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{15-5}.$

$= 3003 \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{10}$

$\approx 0{,}0605$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X = 5) \approx 0{,}06$

La probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées vaut $0,06$.

3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,9331$.

La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée vaut 0, 93.

4. Soit n le nombre de contrôles effectués chaque jour.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$.

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$

On souhaite que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

On veut donc que $1 - 0,835^n \geqslant 0,99$.

$1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,835^n$

$\iff \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,835^n\right)$ car la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\iff \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,835)$

$\iff \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \leqslant n$ car $\ln(0,835) < 0$ donc son inverse aussi

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$

Il faut déclencher 26 contrôles chaque jour.

Partie C :

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,165)$.

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,175$.

Donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$

et $V(X_1) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555$

2. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9$

Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc :

$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,2665$.

3. L'évènement « $6 < S < 14$ » revient à $|S - 10| < 4$ et

$P\left(|S - 10| < 4\right) = 1 - P\left(|S - 10| \geqslant 4\right)$.

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\left(|S - E(S)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(S)}{t^2}$

Pour $t = 4$ on obtient : $P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \dfrac{8,2665}{4^2}$.

D'où $P\left(|S - 10| < 4\right) = 1 - P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \geqslant 1 - \dfrac{8,2665}{16}$.

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,4833$

donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est bien supérieure à 0, 48.

Ex 5 : Centres étrangers 13 juin 2025 – Sujet 2

Partie A

1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter $\text{card}(\Omega) = 16777216$.

2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\dfrac{64\,!}{(64-4)\,!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15249024$ possibilités.

3. **a.** On reprend la question **1.** avec seulement 63 caractères. cela donne donc $63^4 = 15752961$ possibilités.

b. Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ».

Son événement contraire est donc : $\overline{X}$ « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ».

Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1024255$.

Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.

c. La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1000188$ possibilités.

d. Il y a $\dbinom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\dbinom{4}{2} \times 63^2 = 23814$ possibilités.

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$.
2. $P(X=0) = \binom{250}{0} \times 0,01^0 \times (1-0,01)^{250-0} = 0,99^{250} \approx 0,081$.
3. On calcule $P(X > 16) = P(X \geqslant 17)$. Avec la calculatrice, $P(X \geqslant 17) \approx 1,04 \times 10^{-9}$, ce qui est négligeable.

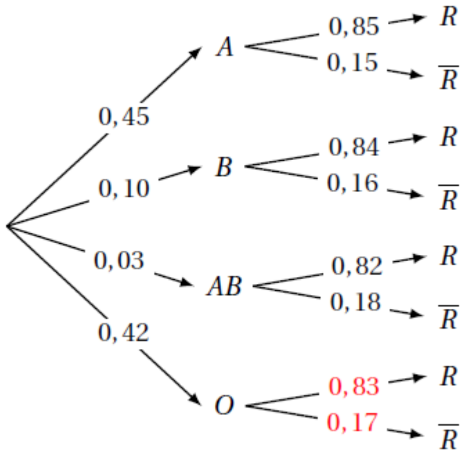
Partie C

En utilisant les propriétés sur la linéarité de l'espérance et de la variance (les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 étant indépendantes), on peut affirmer que :
$E(S) = E(X_1+X_2+X_3+X_4) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4) = 4 \times E(X) =$
$4 \times n \times p = 4 \times 250 \times 0,01 = 10$.
Il en est de même pour la variance :
$V(S) = V(X_1+X_2+X_3+X_4) = V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+V(X_4) = 4 \times V(X) = 4 \times n \times p \times (1-p) =$
$4 \times 250 \times 0,01 \times 0,99 = 9,9$.

Ex 6 : Métropole 17 juin 2025 – Sujet 1

Puisque l'on choisit une personne au hasard dans la population française, on est en situation d'équiprobabilité, et donc la loi uniforme permet d'assimiler les proportions à des probabilités.

1. L'arbre représentant la situation est :



2. $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084$.

   Dans le contexte de l'exercice, 8,4% de la population est de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. Les évènements A, B, AB et O forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

   $$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R)$$

   D'où : $$\begin{aligned} P(O \cap R) &= P(R) - P(A \cap R) - P(B \cap R) - P(AB \cap R) \\ &= 0,8397 - 0,45 \times 0,85 - 0,084 - 0,03 \times 0,82 \\ &= 0,3486 \end{aligned}$$

   Or $P_O(R) = \dfrac{P(O \cap R)}{P(O)} = \dfrac{0,3486}{0,42} = 0,83$

   Ce qui est le résultat donné.

4. Trouver la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel revient à calculer la probabilité $P\left(O \cap \overline{R}\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(O \cap \overline{R}\right) &= P(O) \times P_O\left(\overline{R}\right) \\ &= P(O) \times (1 - P_O(R)) \\ &= 0,42 \times (1 - 0,83) \\ &= 0,0714 \end{aligned}$$

La probabilité d'être un donneur universel est bien de 0,0714.

5. **a.** On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « la personne est un donneur universel » a une probabilité $p = 0,0714$.

   La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

   Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$.

   b. $P(X \leq 7) \approx 0,57714$.

   À 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon vaut 0,577.

   c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$ donc :

   $$\begin{aligned} E(X) &= n \times p \\ &= 100 \times 0,0714 \\ &= 7,14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V(X) &= n \times p \times (1-p) \\ &= 100 \times 0,0714 \times (1 - 0,714) \\ &= 6,630204 \\ &\approx 6,63 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

6. **a.** La variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice représente le nombr moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées.

b. M_N est la moyenne empirique de la variable aléatoire X donc :
$E(M_N) = E(X) = 7,14$.

c. $V(M_N) = \dfrac{V(X)}{N} = \dfrac{6,63}{N}$.

d. L'évènement $\{7 < M_N < 7,28\}$ revient à $\{|M_N - 7,14| < 0,14\}$
et $P\Big(|M_N - 7,14| < 0,14\Big) = 1 - P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big)$.
On veut que $1 - P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \geqslant 0,95$
On veut donc que $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \leqslant 0,05$
Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :
$P\Big(|M_N - E(M_N)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(M_N)}{t^2}$

Pour $t = 0,14$ on obtient : $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \leqslant \dfrac{6,63}{N \times 0,14^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{16575}{49N} \leqslant 0,05 \iff \dfrac{331500}{49} \leqslant N$

$$\iff 6765 + \frac{15}{49} \leqslant N$$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $N \geqslant 6766$.

La plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95$ est 6766.
