Ex 1 : Amérique du Nord – 22 mai 2024 – Sujet 2

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Le trinôme $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,1]$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$.
   Or on sait que $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow -x \leqslant 0 \leqslant 1 - x$ ou en lisant de droite à gauche
   $1 - x \geqslant 0 \Rightarrow 2(1-x) \geqslant 0 \iff g'(x) \geqslant 0$: la dérivée étant positive sur $[0\,;\,1]$ et ne s'annulant qu'en $x = 1$, la fonction g est strictement croissante de $g(0) = 0$ à $g(1) = 2 - 1^2 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. • $u_1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$;
   • $u_2 = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16} = 0,9375$.
3. Démonstration par récurrence :
   • *Initialisation* :
   On a $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: l'encadrement est vrai au rang zéro.
   • *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
   Alors par stricte croissance sur $[0;\,1]$ de la fonction g, on a :
   $g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, soit d'après les résultats précédents :
   $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.
   Conclusion : la relation est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: par le principe de récurrence, on a donc
   Pour tout entier naturel n, : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est majorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.
5. La relation $g(u_n) = u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donne à la limite car g est continue car dérivable sur l'intervalle $[0;\,1]$: $\ell = 2\ell - \ell^2 \iff$
   $\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(1-\ell) = 0$ soit
   $\begin{cases} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1-\ell & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1 & = & \ell \end{cases}$
   La solution $\ell = 0$ n'est pas possible (la suite est croissante) ; il reste $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln\left[1 - \left(2u_n - u_n^2\right)\right] = \ln\left(1 - 2u_n + u_n^2\right) = \ln(1-u_n)^2 = 2\ln(1-u_n)$ (car $1 - u_n > 0$ voir la récurrence ci-dessus, donc $\ln(1-u_n)$ existe). Or $\ln(1-u_n) = v_n$.
   Finalement : $v_{n+1} = 2v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.
7. On sait qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = -\ln 2 \times 2^n$.
8. La relation $v_n = \ln(1 - u_n)$ donne donc :
   $-\ln 2 \times 2^n = \ln(1-u_n) \iff \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln(1-u_n)}$, (par croissance de la fonction exponentielle), soit encore :
   $\mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = 1 - u_n \iff u_n = 1 - \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n}$.
   Or on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = 0$ et par conséquent :
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

script PYTHON → **n=n+1** et **u=2*u-u**2**

Ex 2 : Centres Étrangers – 5 juin 2024 – Sujet 1

1. **a.** Résolvons, dans $[0\,;\,1]$, l'équation demandée :
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\ &\iff x(2\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2) \end{aligned}$$

Or, 0 et $\ln(2)$ sont deux réels dans $[0;\,1]$ (en effet, la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $1 < 2 < \mathrm{e} \Longrightarrow 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans $[0\,;\,1]$: 0 et $\ln(2)$.

b. f est dérivable sur $[0\,;\,1]$, en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in [0;1],\quad f'(x) = 2\times \mathrm{e}^{-x} + (2x)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

On arrive donc à l'expression demandée.

c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $f(0) = 2\times 0\mathrm{e}^{-0} = 0$ et $f(1) = 2\times 1\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}$.

On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0		1
signe de 2		$+$	
signe de $(1-x)$		$+$	0
signe de e^{-x}		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0
variations de f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$

2. **a.** *Initialisation :* Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f(0,1) = 2\times 0,1\mathrm{e}^{-0,1} \approx 0,18$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$ est vraie.

Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1)\\
&\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0;1]\\
&\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-1}\\
&\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n)\\
&\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 1\\
&\qquad \text{car } 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0,74 < 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

b. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

D'après la question **1. a.**, cette équation n'a que deux solutions dans $[0;1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0,1$, donc la limite ne saurait être inférieure à $0,1$: la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

4. **a.** La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, donc elle est majorée par $ln(2)$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ln(2) \implies \ln(2) - u_n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, la différence $\ln(2) - u_n$ est bien positive.

b. Un terme de la suite (u_n) sera donc toujours une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$. Si on veut que la valeur approchée soit à 10^{-4} près, cela signifie que la différence entre u_n, la valeur approchée, et $\ln(2)$ doit être inférieure ou égale à 10^{-4}.

On va donc explorer les termes consécutifs de la suite (u_n) tant que $\ln(2) - u_n > 0,0001$, de sorte que la boucle s'interrompra dès que la différence deviendra inférieure ou égale à $10^{-4} = 0,0001$.

Le script ci-dessous convient (à condition d'avoir importé les fonctions `exp` et `log` qui est la fonction logarithme népérien, de la librairie `math`, au préalable).

On a dans ce corrigé ajouté les deux lignes qui rendent le programme exécutable

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```

Remarque : on peut aussi importer la constante d'Euler de la librairie maths et utiliser une variante : `from math import e` en lieu et place de la première ligne et `u=2*u*e**(-u)` ou `u=2*u/(e**u)` pour l'avant dernière.

c) on déduit **n=11**

Ex 3 : Métropole – 20 juin 2024 – Sujet 2 – Dévoilé

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. a. D'après la définition : pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n \iff u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

b. *Méthode* 1 : d'après la définition : pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} = (u_n - 1)^2 - 1 + 2 \iff u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 - 1(u_n - 1) \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 1 - 1) \iff] \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

Méthode 2 : Soit $P_n = u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$; en posant $u_n = x$, on obtient

$P_n = x^2 - 3x + 2$: ce trinôme a deux racines (car $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$) :

$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

Donc $P_n = (x-1)(x-2) = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

2. a. *Initialisation* : $u_0 = a$ et $1 < a < 2$, donc $u_0 < 2$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 2$.

$u_n < 2 \iff u_n - 2 < 0$ et on a admis que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$, donc d'après le **1 b.** $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n < 2$, d'où par transitivité : $u_{n+1} < 2$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$, donc par le principe de récurrence :

pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

b. On a vu dans la question précédente que $1 < u_{n+1} < u_n < 2$ qui montre :

- que la suite (u_n) est décroissante ;
- que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) est monotone décroissante et minorée par le 1 : elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Par continuité de la fonction polynôme $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$, la relation de récurrence donne à la limite en plus l'infini :

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ell - 1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ell & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 2 \end{array}\right.$$

$\ell = 2$ n'est pas possible puisque (u_n) étant strictement décroissante :

$\ell < u_0 = a < 2$, d'où $\ell < 2$, donc $\ell = 1$.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. u(2,1) renvoie 2 et u(2,2) renvoie 2

2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est constante : $u_n = 2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) = \ln\left[(u_n - 1)^2\right] = 2\ln(u_n - 1)$ car on sait que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$.

Finalement : $v_{n+1} = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 2v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = \ln a - 1)$

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = 2^n \ln(a-1)$.

On peut écrire $v_n = \ln(a-1)^{2^n} = \ln(u_n - 1)$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

$(a-1)^{2^n} = u_n - 1 \iff u_n = 1 + (a-1)^{2^n} = 1 + \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)}$.

2.

- Si $1 < a < 2$, alors $0 < a-1 < 1 \Rightarrow \ln(a-1) < 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

  On a donc $2^n \ln(a-1) < 0$ et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
- Si $a = 2$, $\ln(a-1) = \ln 1 = 0$, donc $2^n \ln(a-1) = 0$ et $u_n = 1 + 1 = 2$. u est constante et on peut écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.
- Si $a > 2$, $a - 1 > 1$, donc $\ln(a-1) > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

  La suite est divergente.

Ex 4 : Amérique du Sud – 21 novembre 2024 – Sujet 1

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout n non nul par $u_n = \dfrac{25 + (-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

Pour tout n non nul, on a : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant +1$ donc $25 - 1 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 25 + 1$ donc $24 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 26$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant \dfrac{25 + (-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{26}{n}$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{26}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{24}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Affirmation 1 fausse

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 &= 1 \\ w_{n+1} &= \dfrac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$n et on considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

Pour tout n, on a : $t_{n+1} = \dfrac{k}{w_{n+1}} = \dfrac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = \dfrac{k(1 + w_n)}{w_n} = \dfrac{k + k w_n}{w_n} = \dfrac{k}{w_n} + k = t_n + k$

Donc la suite (t_n) est arithmétique de raison k.

De plus, $k > 0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

Affirmation 2 vraie

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1 + v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$,

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $v_n > v_{n+1}$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.

- **Initialisation**

  $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(1 + v_0) = \ln(2) \approx 0{,}69$; donc $v_0 > v_1$.
  La propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**

  On suppose que $v_n > v_{n+1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $v_n > v_{n+1}$ donc $1 + v_n > 1 + v_{n+1}$

  Or la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\ln(1 + v_n) > \ln(1 + v_{n+1})$, ce qui veut dire que $v_{n+1} > v_{n+2}$. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0. Elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a démontré que, pour tout $n \geqslant 0$, on avait : $v_n > v_{n+1}$; donc la suite (v_n) est décroissante.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^n \, \mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n$.

$I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^{n+1} \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times [\ln(x)]^{n+1} \, \mathrm{d}x$

On va calculer I_{n+1} au moyen d'une intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u'(x) v(x) \, \mathrm{d}x = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) \, \mathrm{d}x$

On pose $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$, et $v(x) = [\ln(x)]^{n+1}$ donc $v'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times [\ln(x)]^n$.

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \left[x\times\left[\ln(x)\right]^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\times(n+1)\times\frac{1}{x}\times\left[\ln(x)\right]^n\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\mathrm{e}\left[\ln(\mathrm{e})\right]^{n+1} - 1\left[\ln(1)\right]^{n+1}\right) - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}}\left[\ln(x)\right]^n\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e} - (n+1)\,I_n
\end{aligned}
$$

Affirmation 4 vraie

Ex 5 : Amérique du Sud – 22 novembre 2024 – Sujet 2

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Limites :
   - : en $-\infty$: de $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ on en déduit par produit de limites que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
   - : en $+\infty$ $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x}$: on sait que

   $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ (puissances comparées), donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sur cet intervalle :
   $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2-4\right)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x-x^2+4) = \left(-x^2+2x+4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
3. On sait que quel que soit $x\in\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2+2x+4$.

   On a $-x^2+2x+4 = -\left(x^2-2x-4\right) = -\left[(x-1)^2-1-4\right] = -\left[(x-1)^2-5\right] =$
   $-x^2+2x+4 = -\left(x-1+\sqrt{5}\right)\left(x-1-\sqrt{5}\right)$: ce trinôme a deux racines $1-\sqrt{5}$ et $1+\sqrt{5}$.

   On sait que le trinôme a le signe de $a=-1$, donc est négatif sauf sur l'intervalle $\left[1-\sqrt{5}\,;\,1+\sqrt{5}\right]$ où il est positif.

   On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$	0	$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -8{,}5$	-4	$\approx 0{,}25$	$\searrow$	0

On a $f\left(1-\sqrt{5}\right) = \left(2-2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-1} \approx -8{,}5$;
$f\left(1+\sqrt{5}\right) = \left(2+2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-+1} \approx 0{,}25$;
$f(0) = -4$

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = -\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2-1$.
2. On calcule I_n en faisant une intégration par partie : on a
   $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-x} & u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\\ v'(x) = x^n & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\end{cases}$ on a

   $I_n = \left[\mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{0} - \displaystyle\int_{-2}^{0} -\mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = 0 - \dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}x^{n+1}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$,

   donc $I_n = -\dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$ et en multipliant chaque membre par $n+1$,

   $(n+1)I_n = -(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + I_{n+1} \iff I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n$.

3. L'égalité précédente donne avec :
   - $n=0$: $I_1 = (-2)^1\mathrm{e}^2 + I_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2-1$,
   - $n=1$: $I_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + I_1 = 4\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 - 2 = 2\mathrm{e}^2-2$.

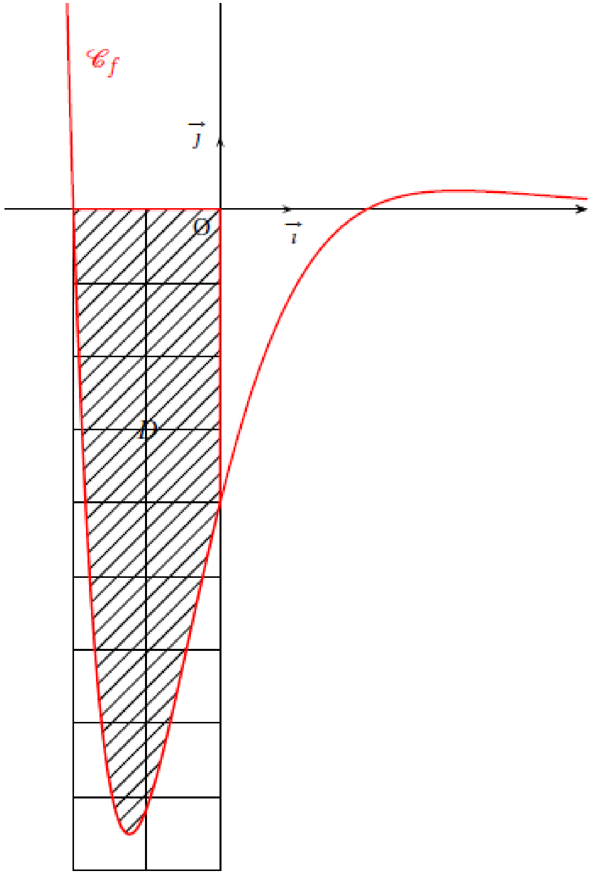
Partie 3

1. f a le signe du trinôme x^2-4 car quel que soit $x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} > 0$.

   Comme $x^2-4 = (x+2)(x-2)$ ce trinôme a le signe de $a=1$ donc est positif, sauf sur l'intervalle borné par les deux racines soit sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ où $f'x) < 0$.

   Donc sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$, $f(x) < 0$ et sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.
2. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2 t on vient de voir que sur l'intervalle $]-2, 0[$, $f(x) < 0$, donc l'aire S du domaine D est égale à l'opposé de l'intégrale de la fonction d de $x=-2$ à $x=0$.

   aire$(D) = -\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} x^2\mathrm{e}^{-x} + 4\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x} = -I_2 + 4I_0 =$
   $4\left(-\mathrm{e}^2-1\right) - \left(2\mathrm{e}^2-2\right) = 2\mathrm{e}^2 - 2 \approx 12{,}78$ (ce que l'on peut conforter avec la figure).



Ex 6 : Amérique du Nord – 22 mai 2025 – Sujet 2 – Secours

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroitrent, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.

   On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $\quad w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2. On va établir la relation de récurrence de (w_n). Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1)\\
&= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}\\
&= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u.\\
&= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\\
&= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)\\
&= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n
\end{aligned}$$

   Ainsi, on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

   Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned}
w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n\\
&\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n
\end{aligned}$$

   On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a :
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question } \mathbf{B.\ 4}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n)\\
u_{n+1} &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n, la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n, la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la question } \mathbf{B.\ 5.}\\
&= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times ((n+1) - 2n)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n)
\end{aligned}$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement ;
- $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n, entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geqslant 0$.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Résolvons cette équation :
$$\begin{aligned}
\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell\\
&\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0\\
&\iff \frac{1}{4}\ell = 0\\
&\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0
\end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.
