Savoir DÉMONTRER PAR RÉCURRENCE

Le principe

Démontrer quelque chose par récurrence, c'est comme savoir faire du vélo :

- Souvenez-vous, la première chose que vous avez appris à faire, ça a été d'enchaîner un demi-tour de pédale après l'autre. C'est l'**itération** : action de refaire la même chose.
- Mais il fallait un adulte pour vous tenir la selle et vous pousser un peu au départ. Vous avez appris ensuite à démarrer, c'est-à-dire à faire le premier demi-tour de pédale. C'est l'**initialisation**.
- Alors là, on vous a dit : « Ça y est, tu sais faire du vélo ! » . C'est la **conclusion**.

Ce qu'on attend de vous

- **Respecter la structure générale de la démonstration** (les trois parties) et tous les détails de rédaction
- **Démontrer l'initialisation**
- **Démontrer l'itération**
- Avec de l'entraînement, **reconnaître une démonstration par récurrence** lorsque ce n'est pas indiqué dans l'énoncé

Comment vous devez faire

- Vous pouvez poser $\mathscr{P}(n)$ la propriété (égalité, comparaison ou autre) à démontrer, c'est pratique pour rédiger.
- Votre démonstration par récurrence obéit aux trois étapes incontournables :
  1) L'**initialisation** : démontrer que $\mathscr{P}(0)$, la propriété au rang 0, est vraie
     C'est en général facile, mais attention à ne pas écrire directement ce que vous devez démontrer !
     Et parfois, on commence à $\mathscr{P}(1)$ ou même à un rang plus grand.
  2) L'**itération** (ou **hérédité**) :
     - supposer que, pour un certain entier n quelconque, $\mathscr{P}(n)$, la propriété au rang n, est vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**),
     - en déduire que $\mathscr{P}(n+1)$, la propriété au rang suivant $n+1$, est vraie.
       C'est la partie technique la plus délicate... On peut :
       - *Méthode A* :
         partir de l'hypothèse de récurrence « $\mathscr{P}(n)$ vraie » et la transformer en « $\mathscr{P}(n+1)$ vraie »,
       - *Méthode B* :
         démontrer que « $\mathscr{P}(n+1)$ vraie » en utilisant à un moment donné « $\mathscr{P}(n)$ vraie ».
       - *Conseil* : écrivez ce à quoi correspond « $\mathscr{P}(n)$ vraie » que vous avez le droit d'utiliser,
         et ce à quoi correspond « $\mathscr{P}(n+1)$ vraie » que vous devez démontrer.
  3) La **conclusion** : conclure que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou tout $n \in \mathbb{N}^*$, ou tout $n \geqslant 4$, etc...).
- Mauvaise nouvelle : parfois, l'énoncé ne précise pas clairement qu'il faut démontrer par récurrence...

  Si vous repérez l'indication « ... pour tout entier naturel n, ... », vous devez penser à utiliser cette méthode.
  Mais attention, pas toujours... Certaines propriétés dépendant d'un entier naturel se démontrent directement, sans raisonnement par récurrence !!! Ce sera d'ailleurs le cas pour deux des questions de cette fiche !

  Alors, quand doit-on utiliser une démonstration par récurrence ?

  Lorsque vous " sentez " que la propriété ne peut être vraie à un rang n que si elle l'est au rang précédent, et donc au rang encore précédent, *et ainsi de suite...* jusqu'au premier rang, dont tout dépend finalement.

Ce que vous aurez à démontrer

- Des **comparaisons** comme par exemple « $u_n < \ldots$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ » (les plus fréquentes au Baccalauréat).
  La *Méthode A* fonctionne quasiment toujours : on transforme $u_n < \ldots$ par étapes successives (soit par opération de chaque côté, soit par fonction, croissante ou décroissante, de chaque côté).
  Il peut arriver qu'on démontre $u_n < \ldots$ en montrant que $u_n - \ldots < 0$, c'est-à-dire en montrant un signe négatif...

  Les exercices ① à ⑤ utilisent des suites définies par récurrence.
  Les exercices ⑥ à ⑧ utilisent des suites définies de manière mixte (u_{n+1} fonction de u_n et de n).
  Les exercices ⑨ à ⑪ sont difficiles.

Les exercices ⑫ à ⑭ font intervenir la fonction exponentielle qui, rappelons-le, est strictement croissante.

Les comparaisons sont parfois cachées :
- si on vous demande de montrer que (u_n) est majorée par 5, il faut montrer $u_n < 5$.
- si on vous demande de montrer que (u_n) est croissante, il faut montrer $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- Des **expressions explicites de termes** u_n en fonction de n (voir les exercices ⑮ à ⑰).
  Les *Méthode A* et *Méthode B* fonctionnent mais la *Méthode B* est la plus naturelle.
- Des **expressions explicites de sommes** de termes en fonction de n (voir l'exercice ⑱).
  Avec la *Méthode B*.
- Les exercices ⑲ et ⑳ sont pour s'entraîner sur des situations moins classiques…

---

① On considère la suite (p_n) définie par $p_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$.

Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0{,}25$.

D'après Baccalauréat S Liban 2007

---

② On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \dfrac{2}{5}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer la suite (u_n) est majorée par 1 .

D'après Baccalauréat S Asie 2008

---

③ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{u_n + 1}$.

Remarque : Pour chaque question, l'itération se démontre avec les deux méthodes. Testez les deux.

a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $u_n \geqslant 0$.

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $u_n \leqslant u_{n+1}$.

D'après Baccalauréat S Centres Étrangers 2010

---

④ On considère la suite (y_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $y_0 = \sqrt{2}$ et $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < y_n \leqslant 2$.

---

⑤ En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

a. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

b. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0{,}75\,h_n + 30$.

c. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) .
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2015

---

⑥ On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}\,a_n$.

a. Démontrer que la suite (a_n) est strictement positive.

b. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.

D'après Baccalauréat S Antilles 2012

---

⑦ Soit (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 0{,}5\,n - 1{,}5$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

D'après Baccalauréat S Antilles 2015

⑧ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n > 0$.

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2010

---

⑨ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

D'après Baccalauréat S Métropole Septembre 2010

---

⑩ **a.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$.

Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;\,8\,]$.

b. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = 6 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1{,}4v_n - 0{,}05\,v_n^2 \end{cases}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

D'après Baccalauréat S Polynésie Septembre 2008

---

⑪ **a.** Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.

Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

En déduire le tableau de variations de la fonction f.

b. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{1}{U_n}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $U_n \geqslant \sqrt{2}$.

D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie Novembre 2006

---

⑫ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

D'après Baccalauréat S Antilles Septembre 2018

---

⑬ On considère la suite (w_n) définie par $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \mathrm{e}^{2w_n - 2} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 0{,}5$.

---

⑭ On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

---

⑮ On définit la suite (u_n) par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

D'après Baccalauréat S Antilles Septembre 2008

---

⑯ On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

D'après Baccalauréat S Polynésie 2011

⑰ On définit la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) u_n + \frac{6}{n+1}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

D'après Baccalauréat S La Réunion 2008

---

⑱ **1.** *La somme des premiers entiers*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. *La somme des premiers carrés*

Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. *La somme des premiers impairs*

Calculer la somme des deux premiers entiers impairs, puis la somme des trois, des quatre et des cinq premiers.
Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2 .$$

Remarque : Autre présentation classique qu'on peut s'entraîner à démontrer : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

D'après Baccalauréat S Antilles Septembre 2010

---

⑲ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3 ou 4, alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

D'après Baccalauréat S Métropole Septembre 2013

---

⑳ Sur une droite (D) munie d'un repère $(O\,;\vec{i}\,)$, soit (A_n) la suite de points de la droite (D) ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$.

a. Placer sur un dessin la droite (D), les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
On prendra 10 cm comme unité graphique.

b. Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
Calculer a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6.

c. Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

d. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 1$.

D'après Baccalauréat S Centres Étrangers 2011